





215.16



1948



B. Prov.

I

1744

1744

6099h1

DEL MOVIMENTO E DELLA MISURA
DELLE
ACQUE CORRENTI
MEMORIA IDRAULICA

DI
ANTONIO TADINI

INVIATA GIA ALLA SOCIETA DEI QUARANTA
FONDATA DAL CAV. LONGNA VERONESE
IN RISPOSTA A SUO QUESITO.



MILANO, 1816.
DALLA TIPOGRAFIA SONZOGNO E COMP.

2000

AL DISCRETO LEGGITORE.

SI produce al pubblico la Memoria Idraulica che alcuni cercarono di far perdere nell'eterna obblivione. La dignità dell'argomento, che in essa si tratta, non permette qui di favellare di tale avvenimento; qualche cosa ne ho detto nel mio Ragguaglio Matematico; basti per ora che il contenuto della Memoria torni di quello in conferma. Io ho dovuto in gran parte compilare di nuovo il suo disteso, non avendo presso di me nè originale, nè copia, ma soltanto alcune carte imperfette. In questa occasione mirando al vantaggio della scienza ho illustrato alcuni punti, mostrando ancora in un luogo qualche equivoco preso dal signor LAGRANGE; ed ho diverse cose aggiunte per saggio di applicazione della nostra geometria al corso de' fiumi, non che per altri minuti oggetti di pratica; ma il calcolo e le sperienze, che formano la soluzione dell'accademico quesito, nessun cangiamento hanno sofferto. Questo scritto, qualunque e' sia, è il primo che addita l'unica e sicura via, che direttamente guida alla cognizione del movimento, e de' fenomeni delle acque correnti e de' fiumi, quella che d'ora innanzi avrà ad essere seguita da tutti coloro i quali aspireranno alla medesima meta; io però mi lusingo che gli uomini intelligenti e discreti gli vorranno essere dell'indulgente loro accogliimento cortesi.

QUESITO PROPOSTO DALLA SOCIETÀ.

« Quale tra le pratiche usate in Italia per la dispensa delle
» acque è la più convenevole, e quali precauzioni ed artifizj do-
» vrebbero aggiungersi per intieramente perfezionarla, riducendo
» le antiche alle nuove misure (metriche). »

AGLI ACCADEMICI.

L' AUTORE.

IL vostro problema, signori accademici, sembra fatto per eccitare coloro, che diconsi periti delle acque, a trattarlo; e forse parecchi di questi si saranno all' impresa accinti. Nulladimeno esso riguarda un fluido in movimento; questo basta perchè il quesito appartenga alla più alta geometria nobilitata dagli sforzi de' grandi Matematici, che appena giunsero sul suo limitare. Alla vostra questione adunque, benchè in apparenza facile, nè di molta rilevanza, non può essere soddisfatto senza la profonda cognizione delle leggi che presiedono al moto de' fluidi. Io colgo questa occasione per offrire all' Accademia nella prima parte della Memoria, che le presento, un' esatta geometria del movimento de' fluidi e delle acque. Io holla trattata a modo mio più che all' altrui, nè ho voluto da essa stralciare alcune verità, che ne sono il frutto, avvegnachè al vostro quesito indifferenti. Essa non sarà inutile per coloro della Società vostra, i quali amano di ragionare al pubblico intorno agli effetti ed ai fenomeni delle acque correnti; ed innanzi di essa potrete chiamare la poca discretezza di quello

straniero , già da voi in altro tema additato , il quale per quelle imperfezioni che sono famigliari compagne de' nuovi ritrovamenti volle screditare l' Idraulica degl' Italiani senza darne una migliore. Nella seconda parte della Memoria discendo , come vuole il problema , a parlare delle pratiche usate in Italia per la dispensa delle acque correnti , facendo conoscere i principali loro difetti : niuna può dirsi all' uopo convenevole , niuna può essere all' intera perfezione recata , senza che venga del tutto cangiata. Io soggiungo la maniera semplice e spedita , suggerita dal premesso calcolo , per dispensare e misurare le acque correnti con tutta certezza e puntualità. Il calcolo esatto non ha bisogno di prove sperimentali che lo confermino ; nulladimeno la dispensa da me additata venne posta al confronto di numerose sperienze : il calcolo è il giudice della poca o molta loro giustezza. E perchè non sembrassi parzialeggiare nella mia proposta , ho fatto ogni sforzo per avvicinare quanto si potesse il più alla convenevolezza anche il metodo che non è il mio , e che io lascio ad altri. La geometria è per sè stessa chiara ; le sperienze si possono agevolmente ripetere ed anche migliorare , il che dipende dalla maggior perfezione delle macchine , e dall' addestrarsi più e più a maneggiarle.

DEL MOVIMENTO E DELLA MISURA
DELLE
ACQUE CORRENTI.

P A R T E P R I M A

MATEMATICA.

CAPITOLO PRIMO.



*Nozione generale delle equazioni di condizione ,
alle quali deve soddisfare il movimento di qualsivoglia corpo.*

1. *S*i noti M una massa qualunque di materia, ed x , y , z additino le tre ordinate di qualsivoglia suo punto, prese sopra tre assi di determinata origine, e posti a squadra l'uno dell' altro. Si contrassegni col simbolo D la *differenziale* della massa e delle quantità che in essa si contemplano variabili dall' uno all' altro de' suoi punti: colla δ sia indicata quella *variazione differenziale* delle quantità, la quale dipenda da un movimento qualunque arbitrario, di cui sia suscettiva la massa in qualsivoglia delle sue parti o de' suoi punti. Quando faremo uso della d , verrà con essa contrassegnata la *differenziale* delle

medesime quantità, che dipende dal determinato movimento cui è necessariamente soggetto il corpo in qualsivoglia suo punto a cagione delle determinate forze, dalle quali è animato.

2. Qualunque sia il movimento del corpo M e delle sue parti, dovrà eseguirsi senza alterazione della sua massa e della massa di qualsivoglia particella che in essa piaccia di assegnare, e che chiameremo col nome di elemento. La massa adunque invariabile di ciaschedun elemento si può considerare come una condizione del moto cui è forza sia in ogni punto del corpo mobile soddisfatto. Conseguentemente il movimento della massa e di ogni sua parte dovrà farsi in guisa che soddisfaccia a qualsivoglia matematica espressione da tal considerazione legittimamente dedotta.

3. Stante che la massa invariabile di ogni elemento è indipendente dalla sua e dall'altrui posizione, la condizione del moto posta in questa inalterabilità sarà indipendente dalle ordinate x, y, z di qualsivoglia elemento.

Ma il mobile corpo M può soggiacere ad una o più altre condizioni del moto, le quali dipendano dal sito dei suoi elementi determinato dalle rispettive ordinate x, y, z di ciascheduno.

4. E poichè ogni condizione del moto viene matematicamente espressa per un'equazione, la massa invariabile

del corpo M sarà rappresentata dalla equazione $DM - \text{cost.} = 0$. Qualunque altra condizione, comunque dipendente dalla posizione degli elementi del mobile corpo, avrà per sua *analitica* espressione l'equazione di questa forma: $N=0$, additandosi colla N una funzione delle ordinate x, y, z, x', y', z' , ecc. de' diversi elementi.

5. Quando un corpo è sospinto da qualche forza al moto, provar deve un ostacolo insormontabile a violare la condizione cui il movimento è subordinato; ed è conseguentemente costretto a seguire quella via ch'è dalla equazione di condizione additata, vale a dire a secondare l'andamento di quella superficie che può considerarsi rappresentata da qualsivoglia particolare equazione di condizione. L'ostacolo che trattiene il corpo mobile dall' infrangere questa condizione, è quello che gli opporrebbe appunto tal superficie per obbligarlo ad andarle a seconda. E poichè la resistenza o contrammomento che una superficie impenetrabile esercita contro la forza di un corpo che tende ad invaderla, ha una direzione alla superficie medesima perpendicolare, ogni resistenza che proverà un corpo in virtù di quella condizione del moto alla quale è costretto di obbedire, verrà esercitata su quella direzione che riesce perpendicolare alla superficie dall'equazione di condizione rappresentata.

6. Egli è perciò qui da notarsi, come supponendo essere $N=0$, ovvero $\delta N=0$ l'equazione di una superficie, facendo uso de' consueti segni delle differenze parziali, e contrassegnando per brevità K la quantità

$\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2}$, la linea perpendicolare alla superficie in qualsivoglia punto che abbia le x, y, z per ordinate farà, com'è noto, coll'asse della x un angolo, il cui *coseno* sia

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) : K,$$

coll'asse della y l'angolo che abbia per *coseno*

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) : K,$$

e finalmente coll'asse della z l'angolo corrispondente al *coseno* espresso per

$$\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) : K.$$

Laonde se indicheremo per φ il contrammomento dovuto alla condizione del moto, ed esercitato secondo la direzione della linea perpendicolare alla superficie rappresentata dalla equazione $N=0$, ovvero $\delta N=0$, sarà, come è chiaro, il contrammomento risultante nella direzione della x

$$\varphi \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) : K,$$

quello ch'è esercitato nella direzione della y

$$\varphi \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) : K,$$

e parimente

$$\xi \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right) : K$$

il contrammomento diretto secondo la z .

7. Essendo pertanto $DM - \text{cost.} = 0$ l'equazione di condizione cui deve soddisfare il movimento della massa M , e di qualsivoglia suo elemento DM per l'inalterabilità della sua mole, si dovrà avere $\delta DM = 0$, e si avrà parimente $\delta N = 0$ se intervenga inoltre la condizione del moto espressa per l'equazione $N = 0$; e similmente si dica di qualunque altra cotal equazione che con esse si accoppiasse. Ciascheduna dovrà ridursi alla forma *analitica* consentanea alla particolare sua nozione, e ad ognuna si avrà da adattare la precedente dottrina per conoscere gli accidenti del moto che succede nella massa M . Ma consideriamo particolarmente quanto appartiene alla prima equazione, ch'è la più importante.

CAPITOLO II.

Nozione particolare della equazione di condizione relativa all'inalterabilità della massa, e sua analitica espressione.

8. Se nel corpo mobile M si disegni un elemento o particella qualunque *differenziale* di forma parallelepipedica coi lati che segneremo Dx , Dy , Dz disposti secondo la direzione dei rispettivi assi x , y , z , e perciò rettangola,

sarà $DM = \Delta D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z}$, significando Δ la densità della DM , che risguarderemo qual funzione delle sue ordinate x, y, z . La DM a cagione del movimento additato per la variazione δ dovrà soffrire cangiamento nella positura e grandezza de' suoi lati; ma se dopo questo mutamento conservasse i lati paralleli, come prima, agli assi delle x, y, z , il solido rimarrebbe ancora parallelepipedo rettangolo; e quindi la variazione $\delta \cdot DM$ sarebbe rappresentata per la $\delta \cdot \Delta D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z}$. Ora questo è appunto ciò che succede; imperocchè mostreremo che, fatta la variazione, il nuovo solido ha ancora tutti i lati paralleli ai correlativi assi delle x, y, z .

A tal fine si considerino i quattro punti del solido posti agli apici degli angoli che hanno per comune ordinata la x , e si cerchi qual sarà per ciaschedun punto la variazione δx di questa ordinata dipendentemente dal movimento espresso per la δ . La δx considerata nella sua più grande generalità non potrà che essere funzione delle tre ordinate di ciaschedun punto. Ora le ordinate di uno dei quattro punti sono x, y, z , dell'altro $x, y + D\dot{y}, z$, del terzo $x, y, z + D\dot{z}$, e finalmente le ordinate del quarto saranno $x, y + D\dot{y}, z + D\dot{z}$. Dunque pel primo punto avremo $\delta x = f(x, y, z)$, pel secondo $\delta x = f(x, y + D\dot{y}, z)$, pel terzo $\delta x = f(x, y, z + D\dot{z})$, ed in fine pel quarto $\delta x = f(x, y + D\dot{y}, z + D\dot{z})$, dove la f è usata per cifra di funzione.

Ma $f(x, y + D\dot{y}, z) = f(x, y, z) + D\dot{y}f'(y)$; $f(x, y, z + D\dot{z}) = f(x, y, z) + D\dot{z}f'(z)$; ed $f(x, y + D\dot{y}, z + D\dot{z}) = f(x, y, z) + D\dot{y}f'(y) + D\dot{z}f'(z)$, usando le $f'(y)$, $f'(z)$ per simboli di funzioni prime derivate dalla funzione primitiva f secondo le rispettive variabili y , z . Ora le $D\dot{y}f'(y)$, $D\dot{z}f'(z)$ sono quantità differenziali di secondo ordine rispetto alla $f(x, y, z) = \delta x$, ch'è del primo; onde quelle non possono entrare nel calcolo di questa. Sono dunque tutte e quattro le $\delta x = f(x, y, z)$, ed eguali fra loro. Perciò il piano che unisce i quattro punti, dopo il comun loro movimento δx , resta parallelo alla primitiva faccia del solido situata verso l'origine della x . In egual modo si mostrerà che anche i quattro punti situati alla sommità dei quattro opposti angoli del solido, che hanno la $x + D\dot{x}$, cioè un'altra x' per comune ordinata, e che perciò faranno un medesimo movimento $\delta x'$, si conserveranno dopo la variazione in un piano parallelo alla primiera faccia del solido giacente nella parte opposta all'origine della x .

Con simile discorso si proverà che eziandio le due facce del solido che hanno per ordinate la y l'una, e l'altra la $y + D\dot{y}$, si mantengono nella variazione parallele alle primitive loro positure; e similmente si conchiuderà contenersi nel movimento parallele ai primitivi piani le due faccette del solido che hanno rispettivamente la z e la $z + D\dot{z}$ per ordinate.

In conseguenza il nuovo solido dopo la sofferta variazione resta compreso da piani paralleli alle primitive facce, ed ha perciò i lati paralleli ai rispettivi assi delle x, y, z ; onde ritorna $\delta D\mathcal{M} = \delta \Delta \gamma \epsilon D\dot{y} D\dot{z}$.

9. Di più essendo le quattro variazioni δx di una faccia del solido eguali fra loro, e fra loro parimente eguali le quattro $\delta x'$ della faccia opposta, la variazione di ciascheduno dei quattro lati Dx sarà $\delta x' - \delta x$. E poichè nel movimento del solido si sono fatte variare tutte e tre le variabili x, y, z , sarà $\delta x' - \delta x$ la variazione totale di ciascheduna Dx , vale a dire $\delta x' - \delta x = \delta Dx$; ma $\delta x' - \delta x$ è parimente la variazione che si otterrebbe nel movimento del solido facendo variare la sola x , e conservando costanti le y, z : dunque $\delta Dx = \left(\frac{\partial Dx}{\partial x}\right) \delta x$. In simil maniera si dimostrerà essere $\delta Dy = \left(\frac{\partial Dy}{\partial y}\right) \delta y$, e $\delta Dz = \left(\frac{\partial Dz}{\partial z}\right) \delta z$.

Di qua si conchiude

$$\left(\frac{\partial Dx}{\partial y}\right) = 0; \left(\frac{\partial Dx}{\partial z}\right) = 0; \left(\frac{\partial Dy}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\partial Dy}{\partial z}\right) = 0; \left(\frac{\partial Dz}{\partial x}\right) = 0; \left(\frac{\partial Dz}{\partial y}\right) = 0.$$

10. Convien qui notare che nel movimento del solido i lati Dx, Dy, Dz fanno pure una variazione dovuta alla $\delta\Delta$; ma siccome la Δ è funzione delle ordinate x, y, z , quella è compresa nelle variazioni dipendenti dal variare

di queste. Anzi se la funzione Δ oltre le ordinate x, y, z contenesse eziandio il tempo t , o altra qualunque variabile h , dovendo queste essere le medesime a tutti gli angoli del parallelepipedo $Dx Dy Dz$, non potrebbero ancora far variare le grandezze dei lati, nè le rispettive loro situazioni.

11. L'equazione pertanto di condizione $\delta DM = 0$ si trasformerà (n.º 8) nella seguente:

$$\delta \Delta Dx Dy Dz = 0,$$

cioè nella

$$\delta \Delta \cdot Dx Dy Dz + \Delta \delta \cdot Dx Dy Dz = 0,$$

alla quale pel n.º 9 si potrà dare questa forma:

$$\delta \Delta \cdot Dx Dy Dz + \Delta \left\{ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \delta x Dy Dz + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right) \delta y Dx Dz + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) \delta z Dx Dy \right\} = 0.$$

Ma, come è noto

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \delta x = \left(\frac{D\Delta}{Dx} \right) Dx, \quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right) \delta y = \left(\frac{D\Delta}{Dy} \right) Dy, \quad \text{e}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} \right) \delta z = \left(\frac{D\Delta}{Dz} \right) Dz; \quad \text{onde l'equazione di condizione}$$

potrà finalmente porsi sotto questo generale aspetto:

$$\frac{D\Delta}{Dx} + \left(\frac{D\Delta}{Dx} \right) + \left(\frac{D\Delta}{Dy} \right) + \left(\frac{D\Delta}{Dz} \right) = 0 \dots (a).$$

Tale è l'*analitica* espressione alla quale suole ridursi l'equazione dell'inalterabilità della massa che altri

men propriamente chiamano equazione della continuità del corpo mobile.

CAPITOLO III.

*Si esamina la natura della forza di resistenza
dipendente dall'inalterabilità della massa.*

12. In virtù dell'equazione di condizione $\delta DM = 0$ dipendente dall'inalterabilità della massa mobile dovendosi in ogni punto di questa, che abbia le x, y, z per ordinate, soffrire un contrammomento (n.° 5), che segneremo π , in direzione perpendicolare alla superficie, che si considera rappresentata dalla medesima equazione $\delta DM = 0$, sarà per le cose dimostrate (n.° 6) il contrammomento che ne risulta in direzione

$$\text{della } x = \frac{\pi \left(\frac{\partial DM}{\partial x} \right)}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial DM}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial DM}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial DM}{\partial z} \right)^2 \right\}}},$$

$$\text{della } y = \frac{\pi \left(\frac{\partial DM}{\partial y} \right)}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial DM}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial DM}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial DM}{\partial z} \right)^2 \right\}}},$$

$$\text{della } z = \frac{\pi \left(\frac{\partial DM}{\partial z} \right)}{\sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial DM}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial DM}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial DM}{\partial z} \right)^2 \right\}}}.$$

13. Esaminiamo alquanto queste tre espressioni. Essendo $\delta DM = \delta \cdot \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}$, dovrà avervi per le premesse (n.º 9)

$$\left(\frac{\partial DM}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \cdot \Delta D\dot{x}}{\partial x}\right) D\dot{y} D\dot{z},$$

cioè

$$\left(\frac{\partial DM}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z} + \left(\frac{\partial D\dot{x}}{\partial x}\right) \Delta D\dot{y} D\dot{z}.$$

La variazione della $D\dot{x}$ secondo la x alla estremità, che ha le x, y, z per ordinate, sarà una funzione f arbitraria di queste, cioè, come già vedemmo, $\delta x = f(x, y, z)$; alla estremità opposta corrispondente alle ordinate $x + D\dot{x}, y, z$ sarà la variazione della $D\dot{x}$, cioè $\delta x' = f(x + D\dot{x}, y, z) = f(x, y, z) + D\dot{x} f'(x)$, denotando per $f'(x)$ la funzione prima derivata dalla $f(x, y, z)$ secondo la variabile x . Dunque

$$\left(\frac{\partial D\dot{x}}{\partial x}\right) \delta x = f(x, y, z) + D\dot{x} f'(x) - f(x, y, z) = D\dot{x} f'(x);$$

conseguentemente

$$\left(\frac{\partial D\dot{x}}{\partial x}\right) = \frac{f'(x)}{f(x, y, z)} D\dot{x}.$$

Perciò si troverà

$$\left(\frac{\partial DM}{\partial x}\right) = \left\{ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \frac{f'(x)}{f(x, y, z)} \right\} \Delta D\dot{x} D\dot{y} D\dot{z}.$$

Indicando similmente per $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ due altre funzioni arbitrarie congeneri della f , ma relative l'una alla variazione della y , e l'altra alla variazione della z ; e per $\mathfrak{f}'(y), \mathfrak{f}'(z)$ le loro prime derivate secondo la rispettiva

variabile, si otterrà in simil modo

$$\left(\frac{\partial DM}{\partial y}\right) = \left\{ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y}\right) + \frac{ff'(y)}{fff(x, y, z)} \right\} \Delta D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z},$$

$$\left(\frac{\partial DM}{\partial z}\right) = \left\{ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial z}\right) + \frac{fff'(z)}{fff(x, y, z)} \right\} \Delta D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z}.$$

14. Segnando per brevità a, b, c i coefficienti della $\Delta D\dot{x}D\dot{y}D\dot{z}$ nei secondi membri delle tre precedenti equazioni, coll'uso di questi le tre formole del n.º 12 si cangeranno nelle seguenti:

$$\frac{\pi a}{V(a^2 + b^2 + c^2)},$$

$$\frac{\pi b}{V(a^2 + b^2 + c^2)},$$

$$\frac{\pi c}{V(a^2 + b^2 + c^2)};$$

le quali saranno per ordine le espressioni delle forze risultanti dal contrammomento π , ed operanti secondo le direzioni delle rispettive ordinate x, y, z .

Ma essendo le funzioni additate per f, ff, fff , e non meno le loro derivate f', ff', fff' arbitrarie, salva la sola condizione dipendente dalla $\delta DM = 0$, egli è chiaro che ciascuna delle quantità a, b, c potrà ricevere qualunque valore U da $U=0$ fino ad $U=\infty$ sì positivo, che negativo. Di qua viene che ciascheduna delle tre frazioni moltiplicate per la π può avere qualunque valore V da $V=0$ fino a $V=1$; e pel doppio segno inseparabile dal radicale V da $V=1$ fino a $V=-1$.

La forza π è del tutto indipendente dal valore arbitrario della V ; nulladimeno dovendo essere in tutta la sua estensione soddisfatta l'equazione di condizione dalla quale sono legittimamente dedotte le tre precedenti espressioni, essa non potrà di sua natura non esser tale che soddisfaccia a tutti i valori V in quelle contenuti. Ora le tre frazioni, delle quali parliamo, non sono che espressioni de' coseni degli angoli, che la direzione della forza π fa cogli assi rispettivi delle x, y, z : e giacchè i valori de' coseni possono variare da $V = 1$ fino a $V = -1$, gli angoli potranno in conseguenza avere qualunque misura da gr. 0 fino a gr. 360 (gr. 400. Nuov. divis. del Cerch.). Dunque la direzione del contrammomento π sarà tale di sua natura, che farà con qualunque degli assi delle x, y, z qualsivoglia angolo da gr. 0 fino a gr. 360, vale a dire che la forza o contrammomento π dovrà operare indifferentemente ed egualmente su tutti i versi.

15. Dalle cose dette si conosce che le espressioni dei *coseni*, i quali entrano nelle tre formole del precedente articolo, sono del tutto indeterminate a cagione delle funzioni arbitrarie indicate per f, ff, fff : Noi vedremo tosto, che assoggettando ad una legittima condizione le grandezze arbitrarie dei tre lati Dx, Dy, Dz dell'elemento DM , acciocchè questa quantità parimente arbitraria esca dal calcolo, le tre funzioni prendono una forma determinata, atta a rappresentare un rispettivo valore o forza determinata.

A tal fine riassumiamo le tre espressioni del n.º 12: e poichè i coefficienti delle differenze parziali sono i medesimi, qualunque sia il genere della differenza cui appartengono, si potrà in esse sostituire la D alla ∂ , scrivendo $\left(\frac{D \cdot DM}{Dx}\right)$, $\left(\frac{D \cdot DM}{Dy}\right)$, $\left(\frac{D \cdot DM}{Dz}\right)$ in cambio di $\left(\frac{\partial DM}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial DM}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial DM}{\partial z}\right)$.

Inoltre essendo ciascheduna formola l'espressione di una forza acceleratrice, positiva o negativa ch'essa sia, se verrà moltiplicata per un elemento qualunque delle dimensioni di M , cioè per Dx , Dy , Dz , essa rappresenterà un elemento o *differenziale* di peso, o vogliam dire di pressione: e dovendo la pressione esercitata in qualsivoglia punto della massa essere indipendente da qualunque arbitraria quantità, e perciò indipendente dalla grandezza arbitraria dei lati Dx , Dy , Dz dell'elemento DM , si potrà questa prendere comunque piaccia, salvo il valore di quella. Essendo pertanto secondo le cose dimostrate

$$\left(\frac{D \cdot DM}{Dx}\right), \left(\frac{D \cdot DM}{Dy}\right), \text{ ecc.} = \left(\frac{D \cdot \Delta Dx}{Dx}\right) Dy Dz,$$

$$\left(\frac{D \cdot \Delta Dy}{Dy}\right) Dx Dz, \text{ ecc., si piglino le } Dx, Dy, Dz \text{ in guisa}$$

che soddisfacciano all'equazione

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{D \cdot DM}{Dx}\right)^2 + \left(\frac{D \cdot DM}{Dy}\right)^2 + \left(\frac{D \cdot DM}{Dz}\right)^2\right\}} = K,$$

indicandosi per K una quantità costante.

Allora le tre espressioni del n.º 12 moltiplicate per le rispettive *differenziali* Dx , Dy , Dz si trasformeranno nelle seguenti:

$$K \left(\frac{D \cdot DM}{Dx} \right) Dx, K \left(\frac{D \cdot DM}{Dy} \right) Dy, K \left(\frac{D \cdot DM}{Dz} \right) Dz;$$

ciascheduna delle quali, e la loro somma parimente esprimerà, secondo le premesse, una *differenziale* di pressione. Ma

$$K \left(\frac{D \cdot DM}{Dx} \right) Dx + K \left(\frac{D \cdot DM}{Dy} \right) Dy + K \left(\frac{D \cdot DM}{Dz} \right) Dz$$

è evidentemente un *differenziale* esatto, che noteremo $D\Pi$, Π indicando una pressione, e $D\Pi$ la sua *differenziale* che corrisponde ad una *differenziale* D delle dimensioni della massa M . Onde sarà

$$\left(\frac{D\Pi}{Dx} \right) Dx = K \left(\frac{D \cdot DM}{Dx} \right) Dx,$$

$$\left(\frac{D\Pi}{Dy} \right) Dy = K \left(\frac{D \cdot DM}{Dy} \right) Dy,$$

$$\left(\frac{D\Pi}{Dz} \right) Dz = K \left(\frac{D \cdot DM}{Dz} \right) Dz.$$

16. In tal maniera, mercè dell' introdotta condizione relativa alle grandezze arbitrarie Dx , Dy , Dz , colla quale sono state pure avvincolate le funzioni d'arbitrio segnate colle f , ff , fff ; e mercè della conseguente espulsione della DM , le tre espressioni indeterminate dell' art. 12 si trasformano nelle tre determinate

$$\left(\frac{D\Pi}{Dx} \right), \left(\frac{D\Pi}{Dy} \right), \left(\frac{D\Pi}{Dz} \right).$$

La forza π che entra nelle prime espressioni dell' art. 12, opera effettivamente col medesimo vigore su tutte le direzioni, e perciò esercita la medesima azione su qualunque dei tre assi delle x, y, z ; ma essendo tal forza variabile dall' un punto all' altro della massa, secondo la legge delle forze delle quali il corpo è animato, può crescere ed accumularsi su d' una direzione, e diminuire e sottrarsi su l' altra: quindi la pressione che nasce dal suo accumulamento, può crescere procedendo per un verso, e diminuire per l' altro; e perciò il mobile deve soffrire contrasto a muoversi per una direzione, e tutto l' opposto gli può avvenire camminando per l' altra. Il momento di questa resistenza accumulata su tutta la lunghezza Dx nella direzione della x è rappresentato dalla $\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right) Dx$, e quello che corrisponde a ciascun punto della Dx sarà in conseguenza espresso per $\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right)$. Similmente $\left(\frac{D\Pi}{Dy}\right)$, $\left(\frac{D\Pi}{Dz}\right)$ rappresenteranno i momenti delle resistenze in direzione delle rispettive y, z corrispondenti a ciascun punto della massa M .

17. Di qua si conoscerà che questo genere di pressione Π operar deve egualmente su tutti i versi come il primitivo contrammomento π , di cui non è che l' accumulamento; ma deve eziandio produrre una resistenza positiva

o negativa nel mobile, secondo che questo colla sua direzione passa da una pressione minore ad una maggiore, o dalla maggiore alla minore. Il calcolo legittimo ha potuto seguire le fedeli tracce del vero, finchè è giunto a svelare il meccanico mistero di tal sorta.

CAPITOLO IV.

Equazione generale del moto di qualsivoglia corpo. Distintivo matematico ch'essa offre de' corpi fluidi, semifluidi e solidi.

18. Ora che abbiamo ritrovato l'espressione determinata di quella forza che dipende dalla impermutabilità della massa di un corpo mobile, potremo dare l'equazione generale del suo movimento. Sia dunque il corpo M in qualsivoglia suo punto, che abbia le x, y, z per ordinate, animato dalle forze X, Y, Z dirette parallelamente agli assi delle rispettive ordinate, e tendenti ad aumentarle; ma s'intenda insieme soggiacere in ogni suo punto alla condizione del moto espressa per $\delta DM = 0$ dipendente dall'inalterabilità della massa; e sia inoltre subordinato ad una o più altre condizioni dipendenti dalle coordinate x, y, z di ciaschedun punto, le quali noi comprenderemo sotto una generale espressione di $N = 0$, potendo in essa contenersi ancora qualche equazione di condizione particolare

ad uno o più punti della massa medesima: pongasi pure nelle formole dell'articolo 6 σ in luogo di $\rho:K$, e si cangi in esse la δ in D .

Secondo le premesse, in qualsivoglia punto cui corrispondano le ordinate x, y, z , la forza acceleratrice che anima il mobile

$$\text{Secondo la dizione della} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ sar\`a: } \Delta Y - \left(\frac{D\Pi}{Dx} \right) - \sigma \left(\frac{DN}{Dx} \right) = \Delta \frac{dp}{dt}, \\ y \dots \Delta Y - \left(\frac{D\Pi}{Dy} \right) - \sigma \left(\frac{DN}{Dy} \right) = \Delta \frac{dq}{dt}, \\ z \dots \Delta Z - \left(\frac{D\Pi}{Dz} \right) - \sigma \left(\frac{DN}{Dz} \right) = \Delta \frac{dr}{dt}; \end{array} \right.$$

denotandosi con p, q, r le tre velocità secondo i tre assi delle x, y, z , e con t il tempo.

19. Esaminiamo i caratteri matematici del corpo mobile, che si celano sotto il velame di queste cifre. E giacchè la natura del corpo mobile è la medesima sì nel moto, che nella quiete, consideriamola nello stato di equilibrio sempre possibile in qualsivoglia natura di corpi, nel quale i secondi membri delle tre equazioni spariranno divenuti $= 0$. Si moltiplichì adunque la prima di queste per Dx , la seconda per Dy , e la terza per Dz ; poi sommandole in una sola, si otterrà

$$D\Pi = \Delta (XDx + YDy + ZDz) - \sigma DN.$$

Essendo il primo membro di questa equazione un *differenziale* esatto per riguardo alle differenze D della massa,

tale sarà ancora il secondo, che scriveremo DK ; onde integrando si otterrà $\Pi = K + \text{cost.}$; e supponendo, come è permesso per maggiore semplicità, che al principio dell'integrale sia $\Pi = 0$, e $K = 0$, sarà pure $\text{cost.} = 0$. Supponiamo inoltre che le forze acceleratrici X, Y, Z risultino da qualunque attrazione; ne verrà, com'è noto, $\Delta(XDx + YDy + ZDz) = \text{differenziale esatto}$. Sia pertanto F il valore di K , quando nella precedente equazione non interviene il termine $-\sigma DN$ dipendente dall'equazione di condizione $N = 0$; sarà $F - K$ l'effetto della resistenza nata da tale condizione, che noteremo $-R$ col segno negativo, per essere sempre negativa e contraria al risultamento F delle forze acceleratrici $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. Sarà dunque

$$\Pi = F - R,$$

F essendo il risultamento delle forze acceleratrici, e $-R$ il prodotto delle resistenze che tendono a diminuirlo.

20. Ora, secondo le cose dimostrate, la Π rappresenta una pressione che opera egualmente per ogni verso; in conseguenza se essa non è per ogni verso rintuzzata da una contraria pressione, vale a dire da un ostacolo che le si opponga, farà che la particella del corpo M , che la soffre, scorra per quella parte ch'è libera d'intoppo; ed altre particelle sciolte dal contrasto di questa saranno parimente spinte l'una dopo l'altra a seguirla, cangiando tutte la loro posizione relativa rispetto alle rimanenti.

Questa proprietà, per la quale le parti di un corpo animato da qualsivoglia forza scorrono per qualunque verso che sia libero d'ostacolo, e cangiano fra loro di rispettiva positura, è quella che si chiama col nome di fluidità. Dunque la pressione Π egualmente per ogni verso esercitata è l'essenziale distintivo de' corpi fluidi.

Quando $R = 0$ sarà $\Pi = F$, vale a dire Π avrà il massimo valore, allora la fluidità sarà la massima, cioè il corpo sarà perfettamente fluido. Dunque $\Pi = F$ esprime la condizione della perfetta fluidità; ed allora un corpo sarà perfettamente fluido, quando le sue parti non sono soggettate ad altra condizione del moto che a quella della massa invariabile. Di qua si conosce che nello stato di equilibrio, che qui si contempla, il momento F è una forza, la quale tende a dislocare le parti del corpo ed a far loro cambiare la rispettiva situazione.

Se all'opposito sarà $R = F$, vale a dire se la legge del moto espressa per l'equazione $N = 0$, la quale regna fra le ordinate delle parti del corpo, è tale, per cui alla forza F tendente a far mutare il sito relativo delle parti medesime si opponga una resistenza R , che la uguagli e ne annulli l'effetto, sarà $\Pi = 0$; cioè il corpo M non avrà punto di fluidità: esso sarà solido.

Se finalmente sia $R > 0$, e $< F$; conseguentemente $\Pi < F$, e > 0 , il corpo avrà una fluidità imperfetta,

vale a dire apparterrà al genere che suol dirsi de' *semi-fluidi*. Questo stato d'imperfetta fluidità dipenderà da una condizione del moto che regna fra le diverse parti del corpo, e regola le reciproche loro distanze, senza però renderle invariabili.

Si conosce pertanto che la pressione Π è il carattere distintivo della qualità de' corpi relativa al loro movimento: se $\Pi = F$, il corpo è perfettamente fluido; se $\Pi = 0$, il corpo è solido; se $\Pi > 0$, e $< F$, il corpo è *semifluido*. E queste tre diverse qualità dipendono dall'essere o non essere il corpo soggetto nel suo movimento ad una condizione di $N = 0$ fra le ordinate delle sue parti, e dall'essere questa condizione tale, che renda o no invariabile la posizione relativa delle parti medesime.

Egli è però da avvertire, come dipendendo in generale la forza R , che modifica la Π , dal sistema delle ordinate del corpo, e perciò ancora dai limiti che lo circoscrivono, non si potrà istituire confronto fra corpo e corpo rispetto alle forze di ciascheduno, se non se a parità di sistema di ordinate e di limiti della massa.

21. Le forze attrattive o repulsive che le parti del corpo esercitano le une sopra le altre, ovvero che soffrono per l'azione de' corpi stranieri, non alterano punto la perfetta fluidità; perchè queste accrescono bensì, o scemano il momento F , ma sempre la Π rimane ad esso eguale, nel che è riposta la perfetta fluidità.

22. Non è qui da passarsi sotto silenzio una importante verità riguardante i corpi *semifluidi*, che si ricava da queste osservazioni, vale a dire che in essi regna una pressione Π , la quale opera egualmente su tutte le direzioni, non altrimenti che ne' fluidi, col solo divario che essa è maggiore in questi, e minore in quelli. Da tal pressione dipende ancora la spinta delle terre, ed il loro scoscendimento, due articoli rilevantissimi per la scienza dell'ingegnere tanto civile, che militare; nulladimeno questo principio è stato fino ad ora dimenticato. Veggansi le *Ricerche intorno le spinte delle terre* del celebre signor Prony, date alla luce in Parigi nell'anno 1802.

CAPITOLO V.

L'equazione generale del movimento de' corpi si contrae al particolare del movimento dell'acqua, e si maneggia.

23. Premessa nelle equazioni dell'art. 18 la generale espressione del movimento di un corpo di qualsivoglia natura, dovendo noi quindi trattare soltanto dell'acqua, avremo a render quella assai più semplice. Primieramente la densità dell'acqua è costante, onde potremo assumere $\Delta = 1$; in secondo luogo l'acqua nell'affar nostro non può considerarsi animata che dalla gravità, la quale all'uopo presente è da ritenersi costante di forza e di direzione;

perciò preso l'asse delle y in direzione verticale, e segnata g la gravità de' corpi alla superficie della terra, e sotto il nostro cerchio parallelo, sarà $\Delta X = 0$, $\Delta Y = g$, $\Delta Z = 0$. Inoltre le sperienze che si fanno intorno all'acqua, l'uso squisito delle bilance *idrostatiche*, il livello costante al quale si conforma la superficie tranquilla de' grandi laghi e del mare, obbligano a dover considerare l'acqua come dotata di gelosissima e perfetta fluidità, ed a trattare il calcolo che la riguarda non altrimenti che presa $\Pi = F$, $R = 0$; vale a dire che nel suo movimento non abbia luogo l'equazione di condizione $N = 0$ relativa alle ordinate delle fluide particelle. Fatte pertanto queste riduzioni nelle tre equazioni dell'art. 18, e moltiplicando la prima per Dx , la seconda per Dy , e la terza per Dz , noi le trasformeremo nelle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{D\Pi}{Dx}\right) Dx &= \frac{dp}{dt} Dx, \\ gDy - \left(\frac{D\Pi}{Dy}\right) Dy &= \frac{dq}{dt} Dy, \\ -\left(\frac{D\Pi}{Dz}\right) Dz &= \frac{dr}{dt} Dz \end{aligned} \right\} \dots \dots (b).$$

24. L'equazione di condizione (a) dell'art. 11 dovendo essere soddisfatta in qualsivoglia movimento dell'acqua, e perciò anche in quello ch'essa fa in virtù della gravità g che l'anima, si potrà prendere $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, stante che dx , dy , dz sono le *differenziali* delle

ordinate x, y, z dovute ai movimenti determinati prodotti dalla forza determinata g , che opera sopra ciascun punto della massa M . Di più essendo $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$, $r = \frac{dz}{dt}$, e dovendosi avere $D \cdot \frac{1}{dt} = 0$, perchè il tempo t non varia per la variazione dei punti della massa espressa colla D , poichè il tempo è il medesimo per tutte le parti del mobile; avvertendo inoltre che $d\Delta = 0$, si potrà porre l'equazione (a) di condizione sotto questa forma:

$$\left(\frac{Ddp}{Dx}\right) + \left(\frac{Ddq}{Dy}\right) + \left(\frac{Ddr}{Dz}\right) = 0 \dots \dots (e).$$

25. Le quattro equazioni (b), (c) a differenze parziali integrate che fossero, servirebbero a determinare in funzioni finite delle ordinate x, y, z di ciascun punto della massa, e del tempo t le quattro incognite p, q, r, Π relative a qualsivoglia elemento della massa; onde per ogni istante di tempo sarebbero rappresentati tutti gli accidenti del movimento in qualsivoglia parte dell'acqua mole. Questa cognizione adunque dipende assolutamente dal saper integrare tali equazioni.

Sommando insieme le tre equazioni (b), si ritrae

$$gDy - D\Pi = \frac{dp}{dt} Dx + \frac{dq}{dt} Dy + \frac{dr}{dt} Dz \dots \dots (d).$$

Il primo membro di questa equazione è visibilmente un differenziale esatto secondo le variabili x, y, z , e perciò tale dovrà essere eziandio il secondo; ma l'integrabilità

di questo è agli occhi nostri velata. Per renderla almeno in qualche caso visibile, convien dare altra forma all'espressione, onde avvincolare le *differenziali* del moto dp , dq , dr colle *differenziali* della massa Dx , Dy , Dz . Dovendo pertanto essere ciascheduna velocità p , q , r funzione delle tre ordinate x , y , z e del tempo t , sarà

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz + \left(\frac{dp}{dt}\right) dt,$$

$$dq = \left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \left(\frac{dq}{dy}\right) dy + \left(\frac{dq}{dz}\right) dz + \left(\frac{dq}{dt}\right) dt,$$

$$dr = \left(\frac{dr}{dx}\right) dx + \left(\frac{dr}{dy}\right) dy + \left(\frac{dr}{dz}\right) dz + \left(\frac{dr}{dt}\right) dt;$$

onde sostituendo questi nuovi valori alle dp , dq , dr nel secondo membro dell'equazione, e cangiando, come è permesso, ne' *coefficienti* delle differenze parziali chiusi fra parentesi la d nella D , eccettuati i termini che si riferiscono alla dt , l'equazione (d) si trasformerà nella seguente:

$$\begin{aligned} gDy - D\Pi = & p \left(\frac{Dp}{Dx}\right) Dx + q \left(\frac{Dp}{Dy}\right) Dx + r \left(\frac{Dp}{Dz}\right) Dx + \left(\frac{dp}{dt}\right) Dx \\ & + p \left(\frac{Dq}{Dx}\right) Dy + q \left(\frac{Dq}{Dy}\right) Dy + r \left(\frac{Dq}{Dz}\right) Dy + \left(\frac{dq}{dt}\right) Dy \\ & + p \left(\frac{Dr}{Dx}\right) Dz + q \left(\frac{Dr}{Dy}\right) Dz + r \left(\frac{Dr}{Dz}\right) Dz + \left(\frac{dr}{dt}\right) Dz \dots (e). \end{aligned}$$

Considerando i tre termini di ciascheduna delle prime tre colonne di questa espressione, facilmente si ravviserà che facendo

$$\left(\frac{Dq}{Dx}\right) = \left(\frac{Dp}{Dy}\right),$$

$$\left(\frac{Dr}{Dx}\right) = \left(\frac{Dp}{Dz}\right);$$

$$\left(\frac{Dr}{Dy}\right) = \left(\frac{Dq}{Dz}\right),$$

ciascheduna colonna rappresenterà un *differenziale* esatto per riguardo alle differenze Dx, Dy, Dz , che sarà

per la 1.^a colonna $= pDp$,

per la 2.^a colonna $= qDq$, e

per la 3.^a colonna $= rDr$;

ma questa condizione si ottiene quando la quantità $pDx + qDy + rDz$ è parimente un *differenziale* esatto per rispetto alle medesime differenze Dx, Dy, Dz della massa; imperocchè allora, com'è noto, si ha appunto

$$\left(\frac{Dq}{Dx}\right) = \left(\frac{Dp}{Dy}\right), \left(\frac{Dr}{Dx}\right) = \left(\frac{Dp}{Dz}\right), \left(\frac{Dr}{Dy}\right) = \left(\frac{Dq}{Dz}\right).$$

Dunque le tre prime colonne dell'espressione, di cui parliamo, rappresenteranno un *differenziale* esatto secondo le differenze Dx, Dy, Dz delle dimensioni della massa, ogni volta che secondo le medesime variabili x, y, z considerate nella massa sarà un *differenziale* esatto la quantità espressa per $pDx + qDy + rDz$.

Facciasi pertanto $pDx + qDy + rDz = D\phi$, ϕ indicando una funzione delle x, y, z e del tempo t ; ma D non riferendo che la *differenziale* presa per riguardo

alle sole differenze Dx , Dy , Dz delle ordinate corrispondenti a diversi punti della massa, sarà

$$p = \left(\frac{D\phi}{Dx} \right), \quad q = \left(\frac{D\phi}{Dy} \right), \quad r = \left(\frac{D\phi}{Dz} \right);$$

quindi

$$pDp = \left(\frac{D\phi}{Dx} \right) D \left(\frac{D\phi}{Dx} \right),$$

$$qDq = \left(\frac{D\phi}{Dy} \right) D \left(\frac{D\phi}{Dy} \right),$$

$$rDr = \left(\frac{D\phi}{Dz} \right) D \left(\frac{D\phi}{Dz} \right).$$

Si troverà parimente

$$\left(\frac{dp}{dt} \right) Dx = \left(\frac{d \cdot D\phi}{dt Dx} \right) Dx; \text{ cioè}$$

$$\left(\frac{dp}{dt} \right) Dx = \left(\frac{D \cdot d\phi}{Dx dt} \right) Dx;$$

e similmente

$$\left(\frac{dq}{dt} \right) Dy = \left(\frac{D \cdot d\phi}{Dy dt} \right) Dy,$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right) Dz = \left(\frac{D \cdot d\phi}{Dz dt} \right) Dz.$$

Dal che si vede che anche i tre termini della quarta colonna dell'espressione precedente formano un *differenziale* esatto, poichè la somma dei secondi membri di queste tre ultime equazioni è evidentemente

$$= D \left(\frac{d\phi}{dt} \right).$$

Sostituendosi adunque nel secondo membro dell'equazione (c) gl' indagati valori, riusciranno *integrabili* secondo le variabili ordinate x, y, z tutti i termini dell'equazione medesima; onde eseguita l'*integrazione*, sortirà

$$gy - \Pi = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{D\phi}{Dx} \right)^2 + \left(\frac{D\phi}{Dy} \right)^2 + \left(\frac{D\phi}{Dz} \right)^2 \right\} + \left(\frac{d\phi}{dt} \right) + K \dots (f),$$

K indicando una costante, che fa mestieri aggiungere all'integrale per compierlo, e per rendere in ogni caso

$$\Pi + \left\{ \left(\frac{D\phi}{Dx} \right)^2 + \left(\frac{D\phi}{Dy} \right)^2 + \left(\frac{D\phi}{Dz} \right)^2 \right\} + \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = 0,$$

quando $gy = 0$.

Se nell'equazione (d) si fossero prese le Dx, Dy, Dz sulla direzione del moto, facendo cioè $Dx = dx, Dy = dy$, ecc., il secondo membro sarebbe divenuto evidentemente *integrabile*; ma tal integrale non sarebbe che particolare alla linea del moto di ciaschedun fluido elemento.

Essendosi eseguita l'*integrazione* soltanto secondo le variabili x, y, z , si dovrebbe secondo le regole del calcolo fare all'integrale l'aggiunta di una funzione arbitraria del tempo t ; ma questa può considerarsi compresa nella ϕ . Tale adunque sarà l'equazione integrale delle forze sollecitatrici del fluido.

26. Esprimendo le velocità p, q, r coi coefficienti delle differenze parziali della ϕ nel precedente articolo dichiarati, l'equazione di condizione (c) dell'art. 24 si cangerà nella seguente:

$$\left(\frac{DD\phi}{Dx Dx}\right) + \left(\frac{DD\phi}{Dy Dy}\right) + \left(\frac{DD\phi}{Dz Dz}\right) = 0 \dots (g).$$

Egli è sotto tal forma che questa equazione suole comunemente chiamarsi dai Matematici col nome di equazione de' fluidi.

27. Integrata che fosse questa equazione (g), e conosciuta quindi la funzione ϕ , per mezzo de' coefficienti $\left(\frac{D\phi}{Dx}\right)$, $\left(\frac{D\phi}{Dy}\right)$, $\left(\frac{D\phi}{Dz}\right)$ delle sue differenze parziali si otterrebbero le tre velocità p , q , r ; quindi l'equazione (f) ci fornirebbe il valore della Π : onde per qualunque valore delle ordinate x , y , z e del tempo t , vale a dire per qualunque punto della fluida massa e per qualunque istante di tempo resterebbero determinate le velocità parallele ai rispettivi assi delle x , y , z , e la pressione che regna in tal punto del fluido. Nel supposto adunque che $pDx + qDy + rDz$ rappresenti un *differenziale* esatto, la scienza fondamentale del movimento dell'acqua o di qualsivoglia fluido si riduce tutta ad investigare la natura della funzione espressa per la ϕ , vale a dire ad integrare l'equazione (g): giova pertanto, prima di proceder oltre, il soggiugnere in questo luogo, quando sia che l'espressione $pDx + qDy + rDz$ possa considerarsi qual *differenziale* esatto.

28. Se per un momento qualunque di tempo la $pDx + qDy + rDz$ fosse *differenziale* compiuto, che segnammo $D\phi$,

sarebbe per tal momento verificata l'equazione (f) dell' art. 25; nel momento seguente la $pDx + qDy + rDz$ diverrà

$$D\phi + dt \left\{ \left(\frac{d\phi}{dt} \right) Dx + \left(\frac{dq}{dt} \right) Dy + \left(\frac{dr}{dt} \right) Dz \right\},$$

e sarà ancora *differenziale* esatto secondo le Dx, Dy, Dz ,

se la quantità $\left(\frac{d\phi}{dt} \right) Dx + \left(\frac{dq}{dt} \right) Dy + \left(\frac{dr}{dt} \right) Dz$ è *differenziale* esatto nel primo istante del moto. Ma dall' equazione (f) si ricava essere in questo primo momento

$$gDy - D\Pi - \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{D\phi}{Dx} \right)^2 + \left(\frac{D\phi}{Dy} \right)^2 + \left(\frac{D\phi}{Dz} \right)^2 \right\} = D \left(\frac{d\phi}{dt} \right);$$

secondo poi le premesse si ha

$$D \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = \left(\frac{d\phi}{dt} \right) Dx + \left(\frac{dq}{dt} \right) Dy + \left(\frac{dr}{dt} \right) Dz.$$

Essendo dunque *differenziale* compiuto il primo membro di questa equazione, lo sarà ancora il secondo; e perciò la $pDx + qDy + rDz$, ch'è *differenziale* esatto nel primo momento, lo è pure nel susseguente. Dal che si conchiude che lo sarà sempre. In fatti essendo le p, q, r funzioni delle x, y, z e del tempo t , se la forma di queste funzioni per un valore qualunque della t è tale da rendere la $pDx + qDy + rDz$ *differenziale* esatto, dovrà questo essere *differenziale* esatto per qualunque altro valore della t ; poichè il diverso valore delle variabili non cangia la forma delle funzioni, dalla quale sola dipende la condizione del *differenziale* esatto.

Allorchè il movimento del fluido è prodotto dalla gravità, secondo l'equazione (d) sarà

$$\frac{dp}{dt} Dx + \frac{dq}{dt} Dy + \left(\frac{dr}{dt}\right) Dz$$

differenziale compiuto: avremo dunque per la nota proprietà de' *differenziali* esatti

$$\left(\frac{D \frac{dp}{dt}}{Dy}\right) = \left(\frac{D \frac{dq}{dt}}{Dx}\right),$$

$$\left(\frac{D \frac{dp}{dt}}{Dz}\right) = \left(\frac{D \frac{dr}{dt}}{Dx}\right),$$

$$\left(\frac{D \frac{dq}{dt}}{Dz}\right) = \left(\frac{D \frac{dr}{dt}}{Dy}\right);$$

ma per essere $\left(\frac{D \frac{1}{dt}}{Dx}\right) = 0$, $\left(\frac{D \frac{1}{dt}}{Dy}\right) = 0$, ecc. perchè

non varia il tempo allo scambiarsi l'uno nell'altro gli elementi della massa, al che si riferisce la *differenziale* indicata per la D , avremo semplicemente

$$\left(\frac{Ddp}{Dy}\right) = \left(\frac{Ddq}{Dx}\right),$$

$$\left(\frac{Ddp}{Dz}\right) = \left(\frac{Ddr}{Dx}\right),$$

$$\left(\frac{Ddq}{Dz}\right) = \left(\frac{Ddr}{Dy}\right);$$

conseguentemente sarà anche

$$dpDx + dqDy + drDz$$

differenziale esatto. Ma allorchè il movimento parte dalla quiete, si ha nel primo stante di tempo $p = dp$, $q = dq$, $r = dr$; dunque al cominciamento del moto generato dalla forza di gravità la $pDx + qDy + rDz$ è un *differenziale* esatto; e perciò secondo le cose dimostrate si manterrà mai sempre tale. Avvertirò per altro, che questo caso rammentato dai matematici appartiene al fluido, il cui moto sia affatto libero secondo la direzione della gravità, o di qualsivoglia forza risultante da una o più attrazioni.

29. Quando le velocità p , q , r sono quantità assai piccole, in guisa che i loro prodotti coi *coefficienti* delle loro differenze parziali si possano nel calcolo trascurare, l'equazione (e) sarà ridotta alla seguente formola:

$$gDy - D\Pi = \left(\frac{dp}{dt}\right) Dx + \left(\frac{dq}{dt}\right) Dy + \left(\frac{dr}{dt}\right) Dz;$$

il cui primo membro essendo un *differenziale* esatto, tale dovrà pur essere il secondo: facciamo dunque

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) Dx + \left(\frac{dq}{dt}\right) Dy + \left(\frac{dr}{dt}\right) Dz = D\psi,$$

ψ indicando una funzione qualunque delle x , y , z e del tempo t ; ma D non riferendosi che alle ordinate x , y , z de' diversi punti o elementi della massa. Moltiplicando l'equazione per dt , ed integrandola secondo la variabile t , si ottiene

$$pDx + qDy + rDz = D(\psi),$$

(ψ) denotando l'integrale della ψdt ; la costante che si

dovrebbe aggiugnere per l' integrazione, la quale sarebbe il valore della $D(\psi)$ al cominciamento del tempo t , si può reputare compresa sotto l'espressione generale della $D(\psi)$. Ma $D(\psi)$ è evidentemente un *differenziale* compiuto secondo le variabili x, y, z , alle quali si riferisce la D ; dunque sarà differenziale compiuto secondo le medesime variabili anche la quantità

$$pDx + qDy + rDz.$$

Quindi nel movimento dell' acqua derivato dalla sua gravità si potrà considerare avverata questa condizione, sempre che le velocità p, q, r siano assai piccole.

Quando nella funzione ϕ non si contenesse il tempo, e fosse perciò $\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0, \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$ ecc., tornerebbe nel presente assunto ciascheduna delle quantità p, q, r eguale allo zero o ad una costante, al che appunto collima la principale supposizione, onde rimarrebbe ancora $pDx + qDy + rDz$ differenziale esatto.

30. Per la medesima ragione, se una delle velocità, qual sarebbe la p , si trovi di qualsivoglia notabile grandezza, ma costante, o presso che costante, onde abbiassi in questo ultimo caso $p = c + p'$, c denotando una quantità costante di qualunque grandezza, e p' una variabile assai piccola, sarà per le cose dimostrate $p'Dx + qDy + rDz$ *differenziale* esatto; ed essendo tale anche cDx , sarà parimente esatta la differenziale $pDx + qDy + rDz$.

Quanto si dice di una velocità p , può accomunarsi anche alle altre q , r ; onde due qualunque delle tre, ed anche tutte e tre possono essere di qualunque grandezza, purchè costante o presso che costante, senza togliere alla espressione $pDx + qDy + rDz$ la qualità che fa considerarla *differenziale* esatto. Se mentre una velocità principale, qual sarebbe la p , è pressochè costante, ed una delle due q , r assai piccola, l'altra sia nulla, come succederebbe quando il fluido fosse costretto a secondare l'andamento di due piani paralleli al piano degli assi delle x , y , ovvero delle x , z , ognun vede che questa quantità dovrà per simile ragione trattarsi qual differenziale compiuto; e diverrà perfettamente tale quando, annullandosi anche la seconda velocità, riesca la $p = \text{costante}$.

Quanto è detto della $p = \text{costante}$, vale parimente per la p eguale ad una funzione della sola x , come ognuno può facilmente comprendere.

Noi daremo a conoscere altrove, come in tutti i fiumi ed in tutte le acque correnti la quantità, di cui ragioniamo, debba considerarsi qual *differenziale* esatto (*). Quindi è che l'equazione (g) dell' art. 26 da questo principio derivata può in natura reputarsi qual fedele espressione dei

(*) Vedi in fine l'annotazione quarta, dov'è rischiarata la presente materia, e dove si dà pure a conoscere qualche equivoco preso dal signor Lagrange.

più comuni e famigliari movimenti delle acque correnti. La difficoltà sta nel deciferarla per mezzo della *integrazione* e nell'esprimere in quantità finite e determinate il valore della ϕ .

CAPITOLO VI.

Della integrazione dell' equazione de' fluidi.

31. L'equazione (g) del movimento de' fluidi è, come si vede, a differenze parziali del secondo ordine; essa è a tre variabili, se nella ϕ si considerano variare tutte e tre le ordinate x, y, z , come qui primieramente supporremo. Il signor Parseval è giunto con ingegnosa ricerca a convertirla in una equazione a differenze ordinarie, alla quale trasformazione suole darsi il nome d'*integrazione*; egli perciò ha ottenuto l'espressione della ϕ ne' seguenti termini:

$$\phi = \iint \frac{1}{v} \int (RR - SS') dv \cdot \psi(\mathfrak{Z}, \sigma) d\mathfrak{Z} d\sigma \\ + \frac{d \left(\iint \frac{1}{v} \int (RR - SS') F(\mathfrak{Z}, \sigma) d\mathfrak{Z} d\sigma \right)}{dz},$$

indicandosi per v un arco di cerchio, che dopo l'integrazione si fa eguale al semicerchio, per $\mathfrak{Z}$ un'espressione di $x + y\sqrt{-1}$, per σ altra di $x - y\sqrt{-1}$, per ψ e F due funzioni arbitrarie della $\mathfrak{Z}$ e della σ , per R e S due determinate funzioni di $\mathfrak{Z}, \sigma$, e di archi di cerchio;

e finalmente per K e S due altre determinate funzioni della z e di archi di cerchio. Vedi la *Meccanica Filosofica di Prony*, fac. 344 e seg.

Ma siccome non si può svolgere il secondo membro di questa equazione dai segni sommatori ff , se prima non sia nota la qualità delle due funzioni $\psi(\vartheta, \sigma)$, $F(\vartheta, \sigma)$; e queste dal loro canto, finattantochè rimangono sotto i medesimi segni ff , non ci lasciano adito a poterle coi noti metodi determinare: nessun profitto si è potuto da tal equazione ritrarre; ed è anzi più maneggevole la primiera e ben semplice espressione (g)

$$\left(\frac{DD\phi}{DxDx}\right) + \left(\frac{DD\phi}{DyDy}\right) + \left(\frac{DD\phi}{DzDz}\right) = 0,$$

come che sia a differenze parziali.

32. Poichè la ϕ è funzione delle x, y, z , usando del metodo comune per lo sviluppo delle funzioni in serie praticato dal signor Lagrange (*Meccan. Analit. f. 474*), potremo rappresentare il suo valore in una serie disposta secondo le potenze di una delle variabili, qual sarebbe per esempio la z nel seguente modo:

$$\phi = F(x, y) + zf(x, y) + z^2 f_1(x, y) + z^3 f_2(x, y) + \dots,$$

prese le $F, f, f_1, f_2 \dots$ per note di funzioni delle x, y senza la z . Sostituendo quindi nella proposta equazione (g) le differenze parziali prese da questa serie, ed uguagliando secondo il noto metodo allo zero i termini moltiplicati per

una medesima potenza della x , si faranno sortire dal calcolo tutte le funzioni f_1, f_2 ecc., e rimarrà l'equazione (g) espressa soltanto nelle due funzioni F, f , e nelle loro derivate. Sviluppando inoltre ciascheduna di queste secondo altra delle due variabili che contiene, per esempio secondo la y , si otterrà finalmente il valore della ϕ rappresentato colla seguente serie:

$$\begin{aligned}\phi = & Fx + yF'x + \frac{1}{2}y^2F''x + \dots \\ & + zf x + yzf'x + \dots \\ & - \frac{1}{2}z^2F'x - \dots \\ & - \frac{1}{2}z^2F''x - \dots\end{aligned}$$

Le funzioni Fx, fx sono due funzioni arbitrarie della sola x ; la $F'x$ è la funzione prima derivata dalla $F(x, y)$ per lo sviluppo della y ; la F'' denota la funzione seconda proveniente dal medesimo sviluppo; e così dicasi di altre nate da tale origine. Similmente la $f'x$ indica la funzione prima derivata dalla $f(x, y)$ secondo la variabile y trasportata fuori della funzione; e così si dirà del resto. Onde tutte le funzioni sono ridotte a non contenere che la sola variabile x ; ed in tal maniera l'espressione della ϕ è recata alla semplicità che si può maggiore.

33. Nulladimeno trattandosi di una equazione a tre variabili, riesce assai malagevole e prolissa faccenda il determinare in via di approssimazione le due funzioni arbitrarie

segnate colle F, f . Mostreremo in altra occasione come ci siamo inoltrati in questo gineprajo, e non senza qualche riuscita. Ora all'uopo nostro potendo nel movimento dell'acqua rendersi costante una delle tre ordinate x, y, z di ciascun fluido elemento, come vedremo, e potendo anzi considerarsi questa come costante in natura anche pei gradi fenomeni de' fiumi, noi intraprenderemo d'investigare in tale assunto le due funzioni arbitrarie, delle quali parliamo. E poichè il supposto che la ϕ sia funzione di due sole variabili, che diremo x, y , apre la via ad una integrazione dell'equazione (g) in termini finiti, benchè necessariamente involti sotto il velo di due funzioni arbitrarie, noi non mancheremo di additarla.

34. Considerandosi la z come costante nell'espressione della ϕ , l'equazione (g) de' fluidi a due variabili diviene

$$\left(\frac{DD\phi}{DxDx}\right) + \left(\frac{DD\phi}{DyDy}\right) = 0,$$

ovvero, ponendo qui per maggior chiarezza $F(x, y)$ in vece di ϕ , ed usando i soliti segni delle funzioni derivate, essa prende questa forma:

$$F''(x, y) = -F''(x, y) \dots \dots (h),$$

$F''(x, y)$ indicando la funzione seconda di $F(x, y)$ presa secondo la variabile x ; e $F'''(x, y)$ denotando parimente la seconda funzione derivata dalla variabile y .

L'equazione è simile a quella delle corde vibranti, che D'Alembert, benemerito inventore del calcolo a differenze parziali (il solo che dominar possa su tutta la vastità delle fisiche scienze), ha integrata con ingegnoso metodo, qual si può vedere presso il Cousin, *Lezioni di calcolo differenziale*, f. 307, e nella Metodica *Enciclopedia*, art.° *Parziali*. Parlando però in particolare della nostra equazione (h) , si può a prima vista rinvenire il suo integrale o funzione primitiva $F(x, y)$.

35. In fatti prescindiamo un momento dalla diversità dei segni, dei quali sono affetti i due membri dell'equazione (h) , ed egli sarà ben chiaro che la funzione seconda, o qualunque derivata dalla variabile x , non può essere eguale alla seconda o a qualsivoglia altra derivata nel medesimo ordine dalla variabile y , se x e y non siano allo stesso modo contenute nella funzione primitiva, ed in guisa che la differenza di questa sia la medesima, tanto se si apponga un'aggiunta alla x , come se in vece si attacchi alla y ; il che non può avverarsi se non se allora quando la funzione primitiva $F(x, y)$ è di questa forma:

$$F(x + y).$$

Questo vale nell'assunto che sia $F''(x, y) = F''(x, y)$; ma dovendo il secondo membro avere per *coefficiente* il -1 , egli è evidente che, trattandosi di una funzione seconda, questo dovrà provenire da un *coefficiente* $= \sqrt{-1}$,

del quale sia affetta la variabile y . Abbiamo dunque in termini finiti un integrale dell'equazione (h), cioè della equazione (g) de' fluidi a due variabili sotto questa forma :

$$\phi = F(x + yV - 1),$$

F denotando una funzione arbitraria. Ma poichè $V - 1$ ha necessariamente due segni $+$, $-$, soddisfarà all'equazione (g) anche l'integrale

$$\phi = FF(x - yV - 1),$$

indicando colla FF un'altra funzione arbitraria. Per la qual cosa l'integrale ϕ non potrà essere compiuto senza comprendere ambedue questi valori ; dunque

$$\phi = F(x + yV - 1) + FF(x - yV - 1)$$

sarà un'espressione della ϕ più compiuta della precedente.

Sotto tal forma è stato fino ad ora , per quanto io sappia , prodotto l'integrale dell'equazione de' fluidi a due variabili (Vedi Cousin , *Lezioni di calcolo differenziale* , f. 311 , nel che collima ancora Coccoli , *Dissertazione ecc.* , f. 19) ; esso sembra compiuto , perchè comprende due funzioni arbitrarie segnate per F , FF , come richiede l'integrazione compiuta delle differenze parziali del secondo ordine ; nulladimeno egli è difettoso , come tosto vedremo.

Giacchè le due funzioni possono essere accoppiate fra loro tanto col segno $+$, quanto col segno $-$, atteso che in ambedue queste maniere resta appagata l'equazione ; il

valore della ϕ potrà rappresentarsi ancora sotto questa forma:

$$\phi = f(x + y\sqrt{-1}) - ff(x - y\sqrt{-1}),$$

indicate per f , ff due nuove funzioni arbitrarie. Unendo adunque questi due valori della ϕ , avremo l'integrale compiuto e generale della ϕ sotto questa espressione:

$$\phi = F(x + y\sqrt{-1}) + FF(x - y\sqrt{-1}) \\ + f(x + y\sqrt{-1}) - ff(x - y\sqrt{-1}) \dots (i).$$

Sembrano in vero quattro funzioni arbitrarie, e perciò eccedenti il bisogno, come pare eziandio chiaro che le due funzioni della $x + y\sqrt{-1}$ potrebbero, generalmente parlando, comprendersi sotto una sola, e parimente sotto una sola le due funzioni della $x - y\sqrt{-1}$; ma noi vedremo che le quattro arbitrarie si ridurranno a due sole non già in questo manchevole modo, ma in altro prescritto dalla natura della funzione ϕ ; per lo che ci è qui uopo fare una digressione.

CAPITOLO VII.

Digressione sopra una proprietà delle funzioni immaginarie, e conclusione della forma alla quale si riduce in termini finiti l'integrale della funzione ϕ a due variabili.

36. Nell'equazione (i) il valore ϕ del primo membro è reale, non immaginario, perciò anche l'espressione del secondo membro dev'essere tale; conseguentemente le

quantità immaginarie che contengono la $\sqrt{-1}$, avranno a distruggersi da loro medesime, e ad uscire dal calcolo. Questa manifesta condizione fa che le due funzioni denotate per F , FF debbano trovarsi d'una stessa forma F , e le due parimente espresse per f , ff d'una medesima forma f ; onde sia

$$FF(x - y\sqrt{-1}) = F(x - y\sqrt{-1}),'$$

$$ff(x - y\sqrt{-1}) = f(x - y\sqrt{-1}).$$

Per dimostrare questa verità conviene svolgere una funzione qualunque di questa forma $F(x + y\sqrt{-1})$.

Sviluppando colle note regole la funzione in una serie esatta e disposta secondo le potenze della $y\sqrt{-1}$, si ricaverà

$$F(x + y\sqrt{-1}) = Fx + y\sqrt{-1}F'x - \frac{y^2}{2}F''x - \frac{y^3\sqrt{-1}}{2 \cdot 3}F'''x \\ + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}F^{IV}x + \frac{y^5\sqrt{-1}}{2 \cdot 3 \dots 5}F^Vx - \dots + \frac{y^n}{1 \cdot 3 \dots n}F^n(x + \lambda y\sqrt{-1}),$$

n indicando un numero qualunque arbitrario, ma che per maggior chiarezza di calcolo si prenderà pari e moltiplice del 4, affinchè il *coefficiente* dell'ultimo termine sia sgombero della $\sqrt{-1}$, ed abbia affisso il segno positivo, il che si intenderà osservato anche in ciò che segue; e λ dinotando un *coefficiente* numerico, che secondo la dottrina delle funzioni in serie sviluppate dovrà essere > 0 , e < 1 .

Ricominciando di nuovo a dispiegare l'ultimo termine in serie, arrestandola ad un numero arbitrario n' di nuovi termini, otterremo l'ultimo

$$= \frac{\lambda^{n'} y^{n+n'}}{2.3 \dots n.2.3 \dots n'} F^{n+n'} (x + \lambda' \lambda y' - 1),$$

λ' denotando un nuovo *coefficiente* > 0 , e < 1 . E ritornando similmente a sviluppare questo medesimo, poi il nuovo che emerge, poi altro ed altro, seguitando via via a fare la stessa operazione per un numero arbitrario m di volte, si troverà finalmente che l'estremo termine, al quale piace di troncare il processo, sarà

$$A y^{n+n' \dots + n^m} F^{n+n' \dots + n^m} (x + \lambda^m \dots \lambda' \lambda y' - 1),$$

A indicando il *coefficiente* della funzione composto di quantità costanti.

In tal modo la premessa serie, in cui è spiegata la funzione $F(x + y' - 1)$, si troverà continuata fino a quest'ultimo termine della n^m , crescendo in essa senza interrompimento gli esponenti della y secondo l'ordine naturale de' numeri $1, 2, 3 \dots$, e dandosi fra loro costantemente il cambio i segni $+$, $-$ di due in due termini, come sopra si osserva.

Considerando l'espressione $\lambda^m \dots \lambda' \lambda y' - 1$ compresa sotto la funzione dell'ultimo termine, atteso che ogni moltiplicatore $\lambda, \lambda' \dots \lambda^m$ ha un valore minore dell'unità,

e dipendente dal numero arbitrario $n, n', \dots n^m$ de' termini di ciascheduna correlativa serie, e potendosi inoltre prendere la m , e perciò la moltitudine di tali moltiplicatori maggiore di qualunque numero dato, s'intenderà facilmente che il valore dell'espressione $\lambda^m \dots \lambda' \lambda y$ potrà rendersi minore di qualsivoglia quantità che si assegni. Rimane adunque dimostrato, secondo il metodo accuratissimo degli antichi, che mercè della continuazione indefinita del processo, col quale si sviluppa nel premesso modo la funzione $F(x + y\sqrt{-1})$, l'espressione $\lambda^m \dots \lambda' \lambda y$, e quindi la quantità immaginaria $\lambda^m \dots \lambda' \lambda y\sqrt{-1}$ compresa sotto la funzione indicata per la $F^{n+n' \dots + n^m}$ dell'ultimo termine diviene $= 0$, e sparisce dal calcolo.

In tal guisa tutte le funzioni della serie indicate per la cifra F comprenderanno la sola quantità reale x , rimanendo fuori del segno F le quantità immaginarie avvolte colla $\sqrt{-1}$.

Avvertiremo in questo luogo, che mercè della continuazione del processo col quale si va sviluppando la primitiva funzione, divenendo $\lambda^m \dots \lambda' \lambda y\sqrt{-1} = 0$, rendesi necessariamente anche $A = 0$, giacchè contiene un moltiplicatore $(\lambda^{m-1} \dots \lambda' \lambda)^m = 0$; ma di qua non conseguita che sia $= 0$ l'ultimo termine della serie generale, poichè la funzione $F^{n+n' \dots + n^m} x$ di questo può, a misura che si

sviluppa, diventare maggiore di qualunque quantità che piaccia di assegnare, ed avere per limite di suo crescimento la quantità $\frac{1}{0}$; il che farà che l'ultimo termine della serie

$$Ay^{n+n'\dots n^m} F^{n+n'\dots + n^m} x$$

abbia per limite del suo valore l'espressione $\frac{0}{0}$, alla quale, come ognun sa, può corrispondere qualsivoglia valore, ed anche maggiore di ogni quantità finita che si assegni.

Ritornando adunque alla serie generale, poichè tutte le funzioni che comprende sono sceverate dalla quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, e questa non rimane che fuori di esse ne' termini che contengono le potenze della y di esponente dispari, potremo rappresentare per B tutti i termini della serie corrispondenti agli esponenti pari della y , e per $C\sqrt{-1}$ tutti que' che hanno l'esponente dispari affisso alla y , B e C denotando due quantità reali. Dal che viene

$$F(x + y\sqrt{-1}) = B + C\sqrt{-1},$$

colla qual sequela conviene il noto teorema di D'Alembert riguardante le quantità immaginarie.

37. Se ora s'intenderà che venga sviluppata un'altra funzione qualunque della $x - y\sqrt{-1}$, che segneremo $FF(x - y\sqrt{-1})$, e che si proceda puntualmente allo stesso modo col quale abbiamo dispiegato la funzione $F(x + y\sqrt{-1})$, la serie de' termini che si otterrà, sarà affatto simile alla precedente, eccetto i segni corrispondenti

alle potenze dispari della y , i quali saranno contrarj. Avremo dunque

$$FF(x - yV - 1) = B - CV - 1,$$

B' e C' indicando parimente due quantità reali.

Egli è chiaro che ciascheduna quantità $B + CV - 1$, e $B' + C'V - 1$ non può rappresentare un valore reale, essendo dall'una e dall'altra inseparabile la quantità immaginaria $V - 1$, quindi nè $F(x + yV - 1)$, nè $FF(x - yV - 1)$ solitariamente presa può esprimere una quantità reale: unendo ambedue insieme, otterremo

$$F(x + yV - 1) + FF(x - yV - 1) = B + CV - 1 \\ + B' - C'V - 1.$$

Nel secondo membro di questa equazione le quantità immaginarie $CV - 1, -C'V - 1$ non possono distruggersi da loro medesime ed uscire dal calcolo, quando non sia $C = C'$, il che non può succedere, se non se a condizione che la funzione indicata per la FF sia della medesima forma che quella denotata per la F , onde si abbia

$$FF'x = F'x, FF''x = F''x, \text{ ecc.}$$

Quindi si conosce la ragione per la quale l'integrale dell'equazione de' fluidi

$$\phi = F(x + yV - 1) + FF(x - yV - 1),$$

qual si trova presso i Matematici, dicasi non compiuto; poichè la condizione della ϕ quantità reale fa che sia FF della medesima costruzione di F ; onde l'integrale diventa

$$\phi = F(x + yV - 1) + F(x - yV - 1),$$

il quale è un integrale particolare e non generale, come esser deve.

Diversa è la cosa nell'equazione delle corde vibranti, dove $\phi = F(x + cy) + FF(x - cy)$ è integrale compiuto; perchè ciascheduna funzione separatamente presa è quantità reale; quindi sussistono le due diverse funzioni arbitrarie che formano l'integrale compiuto.

38. Se ora prenderemo due altre funzioni arbitrarie qualunque $f(x + y\sqrt{-1})$, $ff(x - y\sqrt{-1})$, egli è chiaro che coll'antecedente processo la prima si ridurrà all'espressione di $D + E\sqrt{-1}$, e la seconda all'espressione di $D' - E'\sqrt{-1}$; e sottraendo una funzione dall'altra si otterrà

$$\begin{aligned} f(x + y\sqrt{-1}) - ff(x - y\sqrt{-1}) &= D + E\sqrt{-1} \\ &\quad - D' + E'\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Il secondo membro di quest'equazione non potrà essere liberato dalla $\sqrt{-1}$, nè rappresentare un valore reale se non a due condizioni, cioè: 1.º che D, E, D', E' contengano per comun divisore la $\sqrt{-1}$, vale a dire che le funzioni indicate per f, ff , e le loro derivate siano affette di un divisore costante $= \sqrt{-1}$, in virtù del quale il secondo membro, di cui si ragiona, si trasformerà nel seguente:

$$\begin{aligned} &-(D)\sqrt{-1} + (E) \\ &+ (D')\sqrt{-1} + (E'), \end{aligned}$$

$(D), (E), (D'), (E')$ essendo quantità reali; 2.º che sia $(D') = (D)$, cioè $D' = D$. E poichè questa seconda

condizione non può avverarsi se non quando le f , $\mathfrak{f}$ esprimano una medesima funzione, i due termini $f(x + y\sqrt{-1}) - \mathfrak{f}(x - y\sqrt{-1})$ non rappresenteranno un valore reale, se non se sotto questa particolar forma:

$$\frac{f(x + y\sqrt{-1}) - \mathfrak{f}(x - y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}.$$

39. E qui noteremo di passaggio una verità generale che facilmente si ritrae dalla precedente dimostrazione, vale a dire che qualunque espressione di una quantità reale, la quale contenga l'immaginaria $\sqrt{-1}$, deve avere la forma, o deve poter essere ridotta alla forma di

$$F(a + b\sqrt{-1}) + F(a - b\sqrt{-1}),$$

ovvero di

$$\frac{F(a + b\sqrt{-1}) - F(a - b\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

dove a , b indicano quantità reali. Per esempio la radice cuba d'una quantità reale nel caso che si chiama *irriducibile*, la quale si trova

$$= \sqrt[3]{(a + b\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(a - b\sqrt{-1})^3},$$

appartiene alla prima forma; ed il valore del seno nella seguente espressione

$$\text{Sen. } x = \frac{1}{2} \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

si riferisce alla seconda forma. Nicole avea notato che risolvendo in serie i precedenti due termini della radice

cuba, le quantità che contengono l'immaginaria $\sqrt{-1}$ si distruggevano; ma siccome qui non si trattava che di tal funzione particolare, e la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ rimaneva sempre nell'ultimo termine della serie che si trascurava, la dimostrazione non poté essere nè generale, nè esatta, qual è la nostra; e non sappiamo se altri abbia trattato in tutta la sua estensione simile argomento.

40. Ripigliando ora l'equazione (i) dell'art. 35, colla premessa dottrina facilmente ci convinceremo che non potendo veruna delle quattro funzioni espresse per F, FF, f, ff , presa separatamente dalle altre, rappresentare una quantità reale, non vi ha nessun'altra combinazione dei quattro termini del secondo membro dell'equazione, la quale fornisca due funzioni reali necessarie per l'integrale compiuto, se non se quella di due coppie, quali noi abbiamo già formate. Laonde il vero integrale compiuto della equazione de' fluidi sarà

$$\phi = F(x + y\sqrt{-1}) + F(x - y\sqrt{-1}) \\ + \frac{f(x + y\sqrt{-1}) - f(x - y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} \dots (k).$$

In questa guisa la condizione, per la quale il valore della ϕ dev' essere in effetto reale, avvegnachè espresso per funzioni immaginarie della $\sqrt{-1}$, ha ridotto le quattro funzioni arbitrarie segnate colle F, FF, f, ff a due sole F, f , come esige l'integrazione compiuta dell'equazione a differenze parziali del secondo ordine, di cui trattiamo.

S' intraprende la determinazione delle funzioni arbitrarie contenute nella ϕ .

41. Indagata la forma generale dell' integrale compiuto ϕ , rimangono parimente determinate le forme delle espressioni che rappresentauo le due velocità p, q parallele agli assi delle x e delle y ; imperocchè ritenuti i seguiti praticati nel maneggio delle funzioni, sarà

$$p = \left(\frac{D\phi}{Dx} \right) = F'(x+y\sqrt{-1}) + F'(x-y\sqrt{-1}) \\ + \frac{f'(x+y\sqrt{-1}) - f'(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}};$$

$$q = \left(\frac{D\phi}{Dy} \right) = \sqrt{-1} \{ F'(x+y\sqrt{-1}) - F'(x-y\sqrt{-1}) \} \\ + f'(x+y\sqrt{-1}) + f'(x-y\sqrt{-1}).$$

Egli è chiaro che se in qualche punto della fluida massa M si conoscesse la forma delle due funzioni arbitrarie F, f , e quindi delle loro primitive F, f , essa sarebbe nota per tutta la massa, poichè la forma delle funzioni è invariabile per tutte le parti del fluido. E poichè questo ai limiti della massa deve col suo moto secondare l'andamento delle sponde, o di quelle qualunque superficie, entro le quali il liquore è contenuto, e che noi per maggior chiarezza chiameremo per lo più col nome di sponde; le

due funzioni arbitrarie dovranno esser tali che soddisfacciano alla forma di queste. Dalla figura pertanto delle sponde, entro le quali il fluido corre rinchiuso, si potrà determinare la forma delle due funzioni immaginarie che debbono rappresentare il suo movimento.

42. Ritenendo l' assunto che il movimento del fluido sia indipendente dalla variabile z , sarà $\left(\frac{Dp}{Dz}\right) = 0$, quindi la velocità $v = 0$, e ciascuna stilla del liquore non si muoverà che sopra un piano parallelo a quello degli assi delle x, y . Sia dunque ogni elemento ad una estremità della massa fluida costretto a descrivere su tal piano la curva della rispettiva sponda rappresentata dall' equazione $Dy = mDx$, ed all' altra estremità secondi col movimento la curva dell' opposta sponda rappresentata per l' equazione $Dy = nDx$, m e n essendo funzioni della x . Queste due curve, da noi risguardate come due sponde contenenti il fluido in moto, si considerano come invariabili rispetto al tempo.

Dovendo il fluido secondare col suo movimento la curva delle sponde, le dx, dy avranno fra loro il medesimo rapporto che le Dx, Dy ; onde alle precedenti equazioni delle due sponde si potranno sostituire le seguenti: $dy = m dx, dy = n dx$; quindi ancora

$$\frac{dy}{dt} = m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = n \frac{dx}{dt}, \quad \text{cioè}$$

$$q = mp, \quad q = np,$$

p e q essendo le due velocità dirette parallelamente agli assi delle rispettive x , y .

43. Sostituendo in queste due equazioni i valori delle p , q già ritrovati all' art. 41, e notando y_1 le ordinate y che si riferiscono alla prima sponda, e y_2 quelle che terminano alla seconda, le due equazioni di condizione relative alle sponde si trasformeranno nelle seguenti:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-1} \left\{ F'(x + y_1\sqrt{-1}) - F'(x - y_1\sqrt{-1}) \right\} \\ & \quad + f'(x + y_1\sqrt{-1}) + f'(x - y_1\sqrt{-1}) \\ & = mF'(x + y_1\sqrt{-1}) + mF'(x - y_1\sqrt{-1}) \\ & \quad + m \frac{f'(x + y_1\sqrt{-1}) - f'(x - y_1\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}, \\ & \sqrt{-1} \left\{ F'(x + y_2\sqrt{-1}) - F'(x - y_2\sqrt{-1}) \right\} \\ & \quad + f'(x + y_2\sqrt{-1}) + f'(x - y_2\sqrt{-1}) \\ & = nF'(x + y_2\sqrt{-1}) + nF'(x - y_2\sqrt{-1}) \\ & \quad + n \frac{f'(x + y_2\sqrt{-1}) - f'(x - y_2\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Mercè di queste due equazioni sono da determinarsi le due funzioni arbitrarie F' e f' ; ma il calcolo delle funzioni non è ancor giunto a quel grado di perfezione da poter di netto disbrigare queste due incognite dal sviluppo di simili equazioni. Quindi è che conviene risolvere le funzioni in serie, ed attenersi ad un metodo penoso e di approssimazione, il quale però fortunatamente potrà

soddisfare non solo all'intento nostro, ma ancora alla cognizione delle grandi vicende del corso de' fiumi.

44. Sviluppando pertanto in serie coi conosciuti metodi le funzioni primitive segnate F , f dell'equazione (k), e disponendo i termini in una serie sola secondo le potenze della y , si ottiene

$$\phi = Fx + yfx - \frac{1}{2}y^2F''x - \frac{1}{2.3}y^3f''x + \frac{1}{2.3.4}y^4F'''x \\ + \frac{1}{2.3...5}y^5f'''x - \frac{1}{2.3...6}y^6F^{IV}x + \rho;$$

quindi

$$p = \left(\frac{D\phi}{Dx}\right) = F'x + yf'x - \frac{1}{2}y^2F'''x - \frac{1}{2.3}y^3f^{IV}x \\ + \frac{1}{2.3.4}y^4F^{IV}x + \frac{1}{2.3...5}y^5f^{V}x + \rho,$$

$$q = \left(\frac{D\phi}{Dy}\right) = fx - yF''x - \frac{1}{2}y^2f''x + \frac{1}{2.3}y^3F'''x \\ + \frac{1}{2.3.4}y^4f'''x - \frac{1}{2.3...5}y^5F^{IV}x + \rho.$$

Usiamo indifferentemente la ρ per indicare il residuo di qualsivoglia serie; essa ha perciò diverso valore nelle serie diverse. Per maggior comodo da qui innanzi scriveremo le sole F , f , ecc. in vece delle Fx , fx , ecc.

45. Se la y sia minore della x , come generalmente in natura si verifica per tutte le correnti di acqua, sarà lecito considerare la x come quantità di primo ordine, la y di secondo ordine; potremo inoltre riguardare le m , n

come di second' ordine rispetto alla unità, la q rispetto alla p , ed anche la f' e le sue derivate a fronte della F' e delle sue dipendenti; onde si comprenderà quando le potenze di queste quantità o i loro prodotti saranno del terzo, del quarto o del quinto ordine, ecc. Ciò per altro non serve che per comoda denominazione, la quale non ristigne punto la generalità del calcolo.

46. Sostituendo adunque nelle due equazioni relative alle sponde $q - mp = 0$, $q - np = 0$ i valori delle p , q tratti dalle premesse due serie, non oltrepassando i termini di sesto ordine, noi le trasformeremo nelle seguenti:

$$\begin{aligned}
 & -m F' - my_1 f'' + \frac{1}{2} my_1^2 F'' + \frac{1}{2.3} my_1^3 f^{IV} - \frac{1}{2.3.4} my_1^4 F^{VI} \\
 & + f' - \gamma_1 F'' - \frac{1}{2} \gamma_1^2 f'' + \frac{1}{2.3} \gamma_1^3 F^{IV} \\
 & + \frac{1}{2.3.4} \gamma_1^4 f^{VI} - \frac{1}{2.3...5} \gamma_1^5 F^{VI} + \rho = 0; \\
 & -n F' - ny_2 f'' + \frac{1}{2} ny_2^2 F'' + \frac{1}{2.3} ny_2^3 f^{IV} - \frac{1}{2.3.4} ny_2^4 F^{VI} \\
 & + f' - \gamma_2 F'' - \frac{1}{2} \gamma_2^2 f'' + \frac{1}{2.3} \gamma_2^3 F^{IV} \\
 & + \frac{1}{2.3.4} \gamma_2^4 f^{VI} - \frac{1}{2.3...5} \gamma_2^5 F^{VI} + \rho = 0.
 \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima, facendo $\gamma_2 - \gamma_1 = \lambda$, e disponendo acconciamente i termini, si avrà

$$\begin{aligned}
 (n-m) F' + \lambda F'' &= \frac{ny_2^3 - my_1^3}{2} F''' + \frac{y_2^3 - y_1^3}{2.3} F^{IV} \\
 &\quad - \frac{ny_2^4 - my_1^4}{2.3.4} F^V - \frac{y_2^5 - y_1^5}{2.3...5} F^{VI} + \rho \\
 &\quad - (ny_2 - my_1) f'' - \frac{y_2^3 - y_1^3}{2} f''' \\
 &\quad + \frac{ny_2^3 - my_1^3}{2.3} f^{IV} + \frac{y_2^4 - y_1^4}{2.3.4} f^V + \rho \dots (l).
 \end{aligned}$$

Altrimenti sommando le due equazioni divise per 2, scrivendo μ in vece di $\frac{y_2 + y_1}{2}$, e disponendo a dovere i termini, otterremo

$$\begin{aligned}
 f' &= \frac{n+m}{2} F' + \mu F'' - \frac{ny_2^3 + my_1^3}{2.2} F''' - \frac{y_2^3 + y_1^3}{2.2.3} F^{IV} \\
 &\quad + \frac{ny_2^4 + my_1^4}{2.2.3.4} F^V + \frac{y_2^5 + y_1^5}{2.2.3...5} F^{VI} + \rho \\
 &\quad + \frac{ny_2 + my_1}{2} f'' + \frac{y_2^3 + y_1^3}{2.2} f''' \\
 &\quad - \frac{ny_2^3 + my_1^3}{2.2.3} f^{IV} - \frac{y_2^4 + y_1^4}{2.2.3.4} f^V + \rho \dots (m).
 \end{aligned}$$

47. Si avverta essere nell'equazione (l)

$$m = \left(\frac{Dy_1}{Dx} \right), n = \left(\frac{Dy_2}{Dx} \right), (n-m) = \left(\frac{D\lambda}{Dx} \right);$$

donde viene

$$\begin{aligned}
 (n-m) F' + \lambda F'' &= \left(\frac{D \cdot \lambda F'}{Dx} \right), \frac{ny_2^3 - my_1^3}{2} F''' \\
 &\quad + \frac{y_2^3 - y_1^3}{2.3} F^{IV} = \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^3 - y_1^3}{2.3} F'''}{Dx} \right), \text{ ecc.}
 \end{aligned}$$

$$-(ny_2 - my_1)f'' - \frac{y_2^3 - y_1^3}{2} f''' = - \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^3 - y_1^3}{2} f''}{Dx} \right), \text{ ecc.};$$

moltiplicando adunque l'equazione per Dx , ed integrandola secondo questa differenziale della massa, otterremo

$$\lambda F' = \chi + \frac{y_2^3 - y_1^3}{2 \cdot 3} F'' - \frac{y_2^5 - y_1^5}{2 \cdot 3 \dots 5} F''' + \rho$$

$$- \frac{y_2^3 - y_1^3}{2} f'' + \frac{y_2^4 - y_1^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f''' + \rho,$$

χ contrassegnando una funzione del tempo e di costanti; onde

$$F' = \frac{\chi}{\lambda} + \frac{y_2^3 - y_1^3}{2 \cdot 3 \lambda} F'' - \frac{y_2^5 - y_1^5}{2 \cdot 3 \dots 5 \lambda} F''' + \rho$$

$$- \frac{y_2^3 - y_1^3}{2 \lambda} f'' + \frac{y_2^4 - y_1^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \lambda} f''' + \rho \dots (n).$$

In tutte le precedenti equazioni sono appieno conosciuti i termini compendiatosi sotto la cifra ρ , poichè seguono la manifesta legge de' rispettivi termini antecedenti. E si può osservare che nel secondo membro dell'equazione (n) il primo termine $\frac{\chi}{\lambda}$ dovrà essere quantità del primo ordine; i due termini che conseguono, posti l'uno sopra l'altro, e relativi alle F'' , f'' , sono del terzo ordine, e gli altri due delle F''' , f''' del quinto ordine, e così del resto; talmente che nel valore della funzione F' sono zero tutti i termini d'ordine pari.

48. Quanto all' equazione (m), essendo

$$\frac{n+m}{2} = \left(\frac{D\mu}{Dx}\right), \text{ si avrà } \frac{n+m}{2} F' + \mu F'' = \left(\frac{D \cdot \mu F'}{Dx}\right),$$

e si troverà parimente

$$-\frac{ny_2^2 + my_1^2}{2 \cdot 2} F''' - \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} F^{(4)} = -\left(\frac{D \cdot \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} F'''}{Dx}\right), \text{ ecc.}$$

$$\frac{ny_2 + my_1}{2} f'' + \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2} f''' = \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2} f''}{Dx}\right), \text{ ecc. ;}$$

onde sarà

$$\begin{aligned} f' = & \left(\frac{D \cdot \mu F'}{Dx}\right) - \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} F'''}{Dx}\right) + \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} F^{(4)}}{Dx}\right) + \rho \\ & + \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2} f''}{Dx}\right) - \left(\frac{D \cdot \frac{y_2^2 + y_1^2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(3)}}{Dx}\right) + \rho \dots (o). \end{aligned}$$

Il primo termine del valore di f' è quantità di secondo ordine ; i due seguenti delle F''', f'' , sovrapposti l'uno all' altro, appartengono a quantità di quarto ordine ; i due susseguenti sono del sesto ordine , e così del rimanente : dal che si vede che nel valore della funzione f' fallano i termini di ordine dispari. Nell' equazione (m) sono discese le differenze che in questa equazione (o) vengono soltanto accennate colla cifra D .

49. Dall' equazione (n) si ritrae che

$$F = \frac{Z}{\lambda}$$

sarà la prima approssimazione del valore di F' ; e parimente dall'equazione (o) si riconosce che

$$f' = \left(\frac{D \cdot \mu F'}{Dx} \right)$$

sarà il primo valore approssimante della funzione f' ; e sostituendo alla F' l'indagato primo valore $\frac{\chi}{\lambda}$, avremo la prima approssimazione della f' nella seguente espressione:

$$f' = \chi \left(\frac{D \cdot \frac{\mu}{\lambda}}{Dx} \right).$$

50. A questo solo primo termine tanto della F' , quanto della f' si è limitato il signor Lagrange nella Meccanica, tom. 2, facc. 324, benchè in tal modo nel valore della p , ch'è la velocità principale, manchi la funzione delle m, n , che rappresenta l'effetto dell'obliquità delle sponde; il che rende insufficiente il calcolo ad assicurarci intorno il movimento di una massa considerabile di fluido: oltre di che rimane incerto come possa o no rendersi di notevole quantità il seguito de' termini omissi. Quindi tale espressione è insufficiente a spiegare in natura il movimento delle acque, e molto più a disvelare i grandi fenomeni del corso dei fiumi. Lo spingere la ricerca alla seconda ed alle successive altre approssimazioni dei valori delle F', f' non incontra altra difficoltà che quella di un calcolo prolisso, benchè elementare, non avendosi ad istituire alcuna *integrazione*, trovandosi questa già compiutamente eseguita;

ma ad effettuare soltanto le operazioni, onde prendere le differenze parziali delle F', f' , e rinvenire i loro prodotti colle note funzioni delle y_1, y_2 figurate in ciaschedun termine delle equazioni (m) , (n) . Noi per procedere alla indagine della seconda e della terza approssimazione di ciascheduna F', f' , recando almeno per ora il calcolo alla semplicità che si possa maggiore, supporremo quello che non solo l'intento nostro ci permette, ma che potrebbe altresì bastare a dicifrare le cagioni de' grandi effetti del corso de' fiumi, vale a dire che le due sponde o superficie che sono lambite dal fluido, e si rappresentano dalle equazioni $Dy_1 = mDx$, $Dy_2 = nDx$, siano piane, e che in conseguenza ogni stilla di acqua che lungo di esse si muove, descriva una retta. In tale assunto le quantità m e n riescono costanti.

CAPITOLO IX.

Continuazione del medesimo argomento nell' assunto che siano piane le due superficie lambite dal fluido.

51. Essendo arbitraria l'origine degli assi delle x e delle y , noi la collocheremo alla sponda o superficie delle y_1 , facendo per maggior semplicità $x = 0$, dove $y_1 = 0$; quivi sarà $y_2 = \lambda = a$, a denotando una costante. Laonde in virtù delle equazioni delle superficie $Dy_1 = mDx$, $Dy_2 = nDx$,

sarà $y_1 = mx$, $y_2 = a + nx$, $\lambda = y_2 - y_1 = a + (n-m)x$;
 donde si ritraggono le seguenti espressioni che gioveranno
 per facilitare il calcolo

$$y_1 = m \frac{\lambda - a}{n - m},$$

$$y_2 = \lambda + m \frac{\lambda - a}{n - m},$$

$$\mu = \frac{n+m}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-m} - \frac{ma}{n-m};$$

e surrogando questo valore della μ nell'equazione dell'art. 49

$$f' = \chi \left(\frac{D \frac{\mu}{\lambda}}{Dx} \right),$$

la convertiremo nella

$$f' = \chi m \frac{a}{\lambda^2},$$

che esprime più succintamente il primo valore approssimante della f' .

52. Per passare ora alla seconda approssimazione tanto della F' , che della f' , essendo l'esatto valore della prima funzione espresso nel secondo membro dell'equazione (n), converrà in questo investigare i due termini

$$\frac{y_2^3 - y_1^3}{2 \cdot 3 \lambda} F'' - \frac{y_2^2 - y_1^2}{2 \lambda} f'',$$

che sono quantità di terzo ordine, e formano il secondo valore approssimante della F' . A tal fine bisogna determinare le funzioni F'' , f'' mercè del primo valore della

$F' = \frac{\chi}{\lambda}$ e della $f = \chi m \frac{a}{\lambda^2}$, per le quali si avrà

$$F'' = 2(n-m) \frac{\chi}{\lambda^3},$$

$$f' = -2m(n-m) \frac{a\chi}{\lambda^3},$$

accoppiando il primo di questi valori colla $\frac{y_2^3 - y_1^3}{2.3\lambda}$, ed il secondo colla $\frac{y_2^3 - y_1^3}{2\lambda}$, trasformate prima le y_1 , y_2 nelle espressioni equivalenti dell'art. 51, ce ne verrà

$$\frac{y_2^3 - y_1^3}{2.3\lambda} F'' - \frac{y_2^3 - y_1^3}{2\lambda} f' = \frac{1}{3} (n^3 + nm + m^3) \frac{\chi}{\lambda} - m^3 \frac{a^2 \chi}{\lambda^3}.$$

Qui però conviene osservare che nel secondo membro di questa espressione il primo termine non rappresenta che una funzione del tempo e di costanti divisa per λ ; e siccome nel primo valore della $F' = \frac{\chi}{\lambda}$ la χ indeterminata comprende qualsivoglia funzione del tempo e di costanti, il termine di cui parliamo s'intenderà compreso nel primo valore della $F' = \frac{\chi}{\lambda}$. Resterà adunque la seconda approssimazione della F'

$$= -m^3 \frac{a^2 \chi}{\lambda^3} = -\frac{\chi}{\lambda} \cdot m^3 \frac{a^2}{\lambda^2}.$$

Quindi avremo in due termini il valore approssimante

$$F' = \frac{\chi}{\lambda} - \frac{\chi}{\lambda} \cdot m^3 \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{\chi}{\lambda} \left(1 - m^3 \frac{a^2}{\lambda^2} \right),$$

essendo il primo termine quantità del primo ordine, ed il secondo termine quantità del terzo ordine.

Quanto alla seconda approssimazione della f' , ponendo nella espressione $f' = \left(\frac{D \cdot \mu F'}{Dx} \right)$ in luogo della F' il valore della sua seconda approssimazione testè indagato, e sostituendo alla μ l'equivalente sopra additato, con facilità conseguiremo la quantità di quarto ordine

$$\frac{\chi}{\lambda} \left\{ (nm^2 + m^3) \frac{a^2}{\lambda^2} - 3m^3 \frac{a^2}{\lambda^2} \right\},$$

la quale dovrà formare una parte della seconda approssimazione della f' . L'altra parte di questa medesima approssimazione sarà la somma dei due termini di quarto ordine

$$-\left(\frac{D \cdot \frac{\gamma_2^3 + \gamma_1^3}{2 \cdot 2 \cdot 3} F'''}{Dx} \right) + \left(\frac{D \cdot \frac{\gamma_2^3 + \gamma_1^3}{2 \cdot 2} f'''}{Dx} \right)$$

dell'equazione (o), determinate le F''' , f''' come sopra colla prima approssimazione tanto della F' , che della f' . Tal somma colle premesse sostituzioni delle espressioni di γ_1 , γ_2 si troverà essere

$$\frac{\chi}{\lambda} \left\{ -(nm^2 + m^3) \frac{a^2}{\lambda^2} + 2m^3 \frac{a^2}{\lambda^2} \right\},$$

la quale, combinata coll'altra parte già indagata, renderà la seconda approssimazione della f'

$$= -\frac{\chi}{\lambda} \cdot m^3 \frac{a^2}{\lambda^2}.$$

Abbiamo adunque in due termini il valore approssimante della funzione f nella seguente espressione:

$$f' = \frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} - \frac{\chi}{\lambda} \cdot m^3 \frac{a^3}{\lambda^3} = \frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \left(1 - m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} \right),$$

in cui il primo termine è quantità del secondo ordine, e del quarto ordine il secondo.

53. La terza approssimazione della F' dovrà, non altrimenti che la seconda già indagata della f' , essere composta di due particelle; la prima delle quali sarà la somma dei due termini

$$\frac{y_2^3 - y_1^3}{2 \cdot 3\lambda} F'' - \frac{y_2^3 - y_1^3}{2\lambda} f''$$

dell'equazione (n), derivando però le F'' , f'' non dai primi

valori $\frac{\chi}{\lambda}$, $\frac{\chi}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda}$ delle rispettive funzioni F' , f' , ma bensì

dalle seconde loro approssimazioni, che sono $-\frac{\chi}{\lambda} \cdot m^2 \frac{a^2}{\lambda^2}$,

$-\frac{\chi}{\lambda} m \frac{a}{\lambda} \cdot m^2 \frac{a^2}{\lambda^2}$. In questa guisa alla F'' si dovrà surro-

garre la quantità $-12m^2(n-m)^2 \frac{a^2 \chi}{\lambda^3}$, ed alla f'' la quan-

tità $4m^3(n-m) \frac{a^2 \chi}{\lambda^3}$; per lo che effettuando le operazioni

additate dalla figura dei due termini, noi li trasformeremo nella quantità

$$\frac{\chi}{\lambda} \left\{ -2(n^2 m^2 + nm^3 + m^4) \frac{a^2}{\lambda^2} + 4(nm^3 + m^4) \frac{a^3}{\lambda^3} - 2m^4 \frac{a^4}{\lambda^4} \right\};$$

tale sarà la prima particella del terzo approssimamento della F' .

La seconda particella consisterà nei due successivi termini della medesima equazione (n)

$$-\frac{y_2^2 - y_1^2}{2.3 \dots 5\lambda} F^V + \frac{y_2^4 - y_1^4}{2.3.4\lambda} f^{IV},$$

derivando le F^V , f^{IV} dal primo valore delle correlative F' , f' , cioè facendo

$$F^V = 24 (n - m)^4 \frac{\chi}{\lambda^3},$$

$$f^{IV} = -24 m (n - m)^3 \frac{\alpha \chi}{\lambda^3}.$$

Con questi elementi eseguendo le note operazioni indicate dalla figura dei due termini, e colla premessa avvertenza che ogni funzione del tempo e di costanti divisa per la λ s' intende già compresa nel valore $\frac{\chi}{\lambda}$ della prima approssimazione, si ritrarrà la ricercata quantità

$$= \frac{\chi}{\lambda} \left\{ 2 (n^2 m^2 + nm^3 + m^4) \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - 4 (nm^3 + m^4) \frac{\alpha^3}{\lambda^3} + 3m^4 \frac{\alpha^4}{\lambda^4} \right\}.$$

Unendo adunque le due indagate particelle, conseguiremo la terza approssimazione della F' , la quale sarà

$$\frac{\chi}{\lambda} \cdot m^4 \frac{\alpha^4}{\lambda^4},$$

quantità, come si vede, del quinto ordine.

54. Quindi avremo in tre termini il valore approssimante della F' come segue:

$$\begin{aligned} F' &= \frac{\chi}{\lambda} - \frac{\chi}{\lambda} \cdot m^2 \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\chi}{\lambda} \cdot m^4 \frac{\alpha^4}{\lambda^4} \\ &= \frac{\chi}{\lambda} \left(1 - m^2 \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + m^4 \frac{\alpha^4}{\lambda^4} \right). \end{aligned}$$

55. La terza approssimazione della f' si conseguirà ponendo nel primo termine dell'equazione (o) in vece della F' la sua terza approssimazione testè indagata, e nei secondi termini derivando le F'' , f'' dalle rispettive seconde approssimazioni delle F' , f' , ed in fine sommando le quantità che ne provengono coi due ultimi termini dell'equazione medesima, derivate le loro F'' , f'' dai primi valori approssimanti delle F' , f' . Si troverà perciò il terzo approssimamento della f' composto di tre parti, che sono:

$$1.^{\text{a}} \text{ Parte} = \frac{\chi}{\lambda} \left\{ \dots - 2(nm^4 + m^5) \frac{a^4}{\lambda^4} + 5m^5 \frac{a^4}{\lambda^5} \right\}.$$

$$2.^{\text{a}} \text{ Parte} = \frac{\chi}{\lambda} \left\{ - 2(n^3m^4 + m^5) \frac{a^4}{\lambda^4} + 6(n^3m^4 + m^5) \frac{a^5}{\lambda^5} - 4(nm^4 + m^5) \frac{a^4}{\lambda^4} \right\}.$$

$$3.^{\text{a}} \text{ Parte} = \frac{\chi}{\lambda} \left\{ 2(n^3m^4 + m^5) \frac{a^4}{\lambda^4} - 6(n^3m^4 + m^5) \frac{a^5}{\lambda^5} + 6(nm^4 + m^5) \frac{a^4}{\lambda^4} - 4m^5 \frac{a^5}{\lambda^5} \right\}.$$

La somma di tutte e tre queste quantità non è che $\frac{\chi}{\lambda} m^5 \frac{a^5}{\lambda^5}$.

Tale è dunque il terzo approssimamento della f' , che si conosce appartenere a quantità del sesto ordine.

56. Abbiamo pertanto il valore approssimante della f' espresso in tre termini nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 f' &= \frac{\lambda}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda} \cdot m^3 \frac{a^3}{\lambda^3} + \frac{\lambda}{\lambda} \cdot m^5 \frac{a^5}{\lambda^5} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \left(1 - m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} + m^4 \frac{a^4}{\lambda^4} \right).
 \end{aligned}$$

57. Nella medesima maniera si troverebbe la quarta approssimazione della $F' = -\frac{\lambda}{\lambda} \cdot m^6 \frac{a^6}{\lambda^6}$, la quinta $= \frac{\lambda}{\lambda} m^8 \frac{a^8}{\lambda^8}$, e così del resto; e parimente la quarta della $f' = -\frac{\lambda}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \cdot m^6 \frac{a^6}{\lambda^6}$, la quinta $= \frac{\lambda}{\lambda} \cdot m \frac{a}{\lambda} \cdot m^8 \frac{a^8}{\lambda^8}$, e così del rimanente; regnando una medesima e semplicissima legge tanto nei termini del valore della F' , quanto in quelli del valore della f' . Donde si conchiude l'intero valore di queste due funzioni, essendo

$$F' = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + m^2 \frac{a^2}{\lambda^2}},$$

$$f' = \frac{\lambda}{\lambda} m \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + m^2 \frac{a^2}{\lambda^2}}.$$

A conclusioni sì semplici si potrà forse pervenire con calcoli più compendiosi; a me basta ora l'averle ottenute perfettamente esatte e sicure.

58. Rimangono in tal modo determinate tutte le funzioni F'' , F''' , ecc. f'' , f''' , ecc. derivate dalle F' , f' ; benchè tornerà bene il desumerle dalle serie espresse negli articoli 54 e 56, quando vogliansi separati i termini che

si riferiscono a quantità di diversi ordini. Essendo poi

$$F' = \chi \frac{\lambda}{\lambda^2 + m^2 a^2}, \text{ e } dx = \frac{d\lambda}{n-m},$$

si troverà la funzione primitiva

$$F = \frac{\chi}{n-m} \int \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + m^2 a^2} = \frac{\chi}{2(n-m)} \log. (\lambda^2 + m^2 a^2) + \theta,$$

additata per θ una nuova funzione del tempo e di costanti. Quindi l'espressione della ϕ rappresentata nell' articolo 44 resterà in ogni parte determinata, e potrà porsi sotto la seguente forma :

$$\begin{aligned} \phi = & \theta + \frac{\chi}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda}{2(n-m)} \log. (\lambda^2 + m^2 a^2) + m a \frac{y}{\lambda} - m^2 a^2 \frac{y}{\lambda^2} + \dots \right. \\ & + \frac{1}{2} (n-m) \frac{y^2}{\lambda} - \frac{3}{2} m^2 (n-m) a^2 \frac{y^2}{\lambda^3} + \dots \\ & - m (n-m)^2 a \frac{y^3}{\lambda^3} + \dots \\ & \left. - \frac{1}{4} (n-m)^3 \frac{y^4}{\lambda^3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Si può osservare che la funzione ϕ è di questa forma :

$$\phi = \chi \psi + \theta,$$

ψ essendo funzione delle variabili x , y , e χ in vece funzione del tempo, come pure θ .

59. A fine per altro di ottenere i valori delle velocità p e q , che è l'oggetto principale delle ricerche di tal

genere, non è mestieri ricorrere direttamente a questa espressione della ϕ , poichè essi sono particolarmente rappresentati dalle rispettive serie del citato articolo 44. Basta adunque collocare in queste gl' indagati valori delle F' , f' e delle loro derivate funzioni per avere i valori delle p , q , che sono i più importanti elementi delle idrauliche indagini.

60. Nella determinazione di questi valori giova far uso delle F' , f' espresse in serie come agli articoli 54, 56 e 57, e da indi trarre ancora le dipendenti F'' , f'' , ecc. In questo modo disponendo acconciamente i termini della serie che costituisce la quantità p , ci accorgeremo sortirne

$$\begin{aligned}
 p = & \frac{x}{\lambda} \\
 & - \frac{x}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2 \\
 & + \frac{x}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^4 \\
 & - \frac{x}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^6 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

La somma adunque di questa serie, che agevolmente si dà a conoscere, forma il valore della p ; onde sarà

$$p = \frac{x}{\lambda} \frac{1}{1 + \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2}$$

61. In simil guisa riconosceremo che la serie dell' articolo 44, la quale rappresenta il quanto della q , si trasmuta nella seguente :

$$\begin{aligned} q = & \frac{\chi}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right) \\ & - \frac{\chi}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2 \\ & + \frac{\chi}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^3 \\ & - \dots \end{aligned}$$

Sommando pertanto questa nuova serie, ce ne verrà

$$q = \frac{\chi}{\lambda} \frac{m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda}}{1 + \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2}.$$

Osserva essere i valori della p e della q di questa forma: $p = \chi \alpha$, $q = \chi \beta$; α e β essendo funzioni delle variabili x , y , e χ funzione del tempo.

62. Per una corrente di fluido, nella quale ogni stilla abbia una velocità ed una direzione diversa da quella delle altre, questa è la prima volta che si dà a conoscere l'esatto valore della p e della q . Considerando l'asse delle x qual asse della corrente, e riflettendo alla presenza della y nel valore della p e della q , facilmente ci persuaderemo che in qualunque sezione del fluido a squadra coll'asse deve variare sì l'una che l'altra velocità, di modo che

le diverse stille d'una medesima sezione abbiano diversa velocità e diversa direzione secondo la varia loro distanza dall'asse; il che dimostra la fallace supposizione dell'uguaglianza e parallela direzione de' movimenti di tutti i punti d'una medesima sezione, alla quale sogliono conformarsi i calcoli de' matematici idraulici.

63. Facendo per brevità $m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{\gamma}{\lambda} = A$, le espressioni delle p , q degli articoli 60 e 61 si compendieranno nelle seguenti:

$$p = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+A^2},$$

$$q = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{A}{1+A^2};$$

quindi

$$p^2 + q^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1+A^2}.$$

Segnando pertanto v la velocità di ciascun punto del fluido risultante dalle due p , q , sarà

$$v = \sqrt{(p^2 + q^2)} = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}};$$

donde viene

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}} = \frac{p}{v} = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}},$$

espressione ben semplice che a suo luogo ci sarà uopo usare.

Ma senza andare più innanzi in queste particolari considerazioni, ora che abbiamo conseguito il valore integrale della ϕ , ritorniamo all'equazione (f) dell'art. 25, onde partimmo.

CAPITOLO X.

Si ripiglia l'equazione della forza sollecatrice, e nel presente assunto si dicifera.

64. L'equazione (f) dell'art. 25 relativa alla forza sollecatrice del fluido, per essere nel presente assunto $\left(\frac{D\phi}{Dt}\right)=0$, prenderà, secondo le premesse indagini, la seguente forma:

$$gy = \Pi + \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2 + \frac{d\chi}{dt} \psi + \frac{d\theta}{dt} + K \dots (p).$$

L'art. 63 ci rammenterà che la funzione χ del tempo entra pure nelle espressioni delle p, q . Se a due determinati valori delle ordinate x, y si conoscono le corrispondenti pressioni Π , come suole succedere alle estremità della fluida massa, ove la superficie sia libera e conseguentemente $\Pi=0$, o dove la pressione sia esercitata da una nota forza esterna che calchi il fluido; ponendo questi due conosciuti valori in cambio della Π , l'equazione generale si trasforma in due particolari, che servono a determinare le due incognite χ , e θ in t : queste nuove

espressioni delle χ , θ in t riposte nella equazione generale rendonla acconcia a determinare il valore della Π per qualunque x e y , e per qualsivoglia tempo t . Le costanti si desumono dallo stato iniziale del fluido, vale a dire dai valori particolari che si assegnano alle x , y , Π , p , q , quando $t=0$. In tal maniera per qualunque valore della x e della y , vale a dire per qualunque punto della fluida massa che abbia le x , y per coordinate, si conosce in qualsivoglia istante di tempo la velocità p secondo l'asse delle x , e la velocità q secondo l'asse delle y ; e quindi la direzione ed il valore della velocità risultante v . Così il problema idraulico del movimento del fluido resta nel presente assunto pienamente sciolto.

65. Allorchè il movimento dell'acqua è in uno stato permanente, vale a dire che le velocità e la pressione non variano al variare del tempo, ma soltanto al variare del luogo, cioè delle ordinate x , y , di maniera che a ciascun punto dello spazio, pel quale va continuamente passando il fluido, la velocità di questo rimanga inalterabile e sempre la medesima, come si avvera nelle correnti delle quali avremo a trattare, e come succede ne' fiumi stessi quando si mantengono costanti alla medesima altezza, e quali anzi senza notevole errore per notevoli durate di tempo si possono mai sempre considerare in qualsivoglia periodo di qualunque piena, la funzione ϕ non contiene

il tempo, la $\theta = 0$, e la χ non è funzione che di sole costanti; onde l'equazione (p) si riduce alla semplice forma di

$$gy = \Pi + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + K.$$

Essendo poi (art. 63) $v = \sqrt{p^2 + q^2}$, e perciò $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$, avremo

$$gy = \Pi + \frac{1}{2}v^2 + K.$$

E poichè K è quella costante che rende $= 0$ il secondo membro dell'equazione, quando $y = 0$, sarà

$$gy = \Pi + \frac{1}{2}v^2 - (\Pi) - \frac{1}{2}(v)^2, \dots\dots\dots (q)$$

(Π) e (v) denotando la pressione e la velocità del fluido nel punto cui corrisponde la $y = 0$. Usando finalmente in vece della v il suo valore $= \frac{\chi}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$ (art. citato),

l'equazione si cangerà nella seguente:

$$gy = \Pi + \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1+A^2} - (\Pi) - \frac{1}{2}(v)^2.$$

66. Questa ultima equazione serve a determinare il valore della costante χ , poichè fatta $y = 0$, si ha $\Pi = (\Pi)$, $\lambda = a$, $A = m$; onde

$$0 = \frac{\chi^2}{a^2 + m^2 a^2} - (v)^2,$$

$$\chi = (v) a \sqrt{1 + m^2}.$$

67. L'uso ha dato il nome di forza viva al quadrato v della velocità; noi diremo similmente altezza viva la gy , dalla quale essa trae origine, giacchè rappresenta un' altezza y moltiplicata per una forza sollecitatrice g , che la rende attiva a guisa di un peso. Per questa medesima ragione una lunghezza qualunque moltiplicata per una forza sollecitatrice esprimerà ancora una pressione.

Sia il metro l'unità di spazio lineare, e si pigli un tempo $\mathfrak{S}$ per unità di tempo, sarà $\frac{\text{met.}}{\mathfrak{S}}$ l'unità di velocità, $\frac{\text{met.}}{\mathfrak{S}^2}$ l'unità di forza acceleratrice, che moltiplicata per l'unità lineare darà $\frac{\text{met. met.}}{\mathfrak{S}^2}$ per l'unità di altezza viva, e parimente per unità di pressione e di forza viva ancora.

Inoltre l'unità di forza acceleratrice $= \frac{\text{met.}}{\mathfrak{S}^2}$ in un minuto secondo sessantesimo, che noteremo $1''$, farebbe colla libera caduta passare al corpo mobile uno spazio $= \frac{1'' \cdot 1'' \cdot \text{met.}}{2\mathfrak{S}^2}$; la gravità terrestre g alla latitudine di Milano gli fa in vece nel medesimo tempo passare lo spazio $= 4^{\text{met.}}$, 9027; e poichè le forze sono fra di loro come questi spazj, sarà

$$\frac{\text{met.}}{\mathfrak{S}^2} : g :: \frac{1'' \cdot 1'' \cdot \text{met.}}{2\mathfrak{S}^2} : 4^{\text{met.}}, 9027,$$

donde si cava $g = \frac{\text{met.}}{\mathfrak{S}^2} \times 9,8054 \frac{\mathfrak{S}^2}{1'' \cdot 1''}$; e ponendo l'unità di forza acceleratrice in vece di $\frac{\text{met.}}{\mathfrak{S}^2}$, e n in luogo di $\frac{\mathfrak{S}}{1''}$, sarà

$$g = 9,8054n^2.$$

Dal che si vede che preso il metro per unità di spazio lineare, dipende da quel tempo che si piglia per unità di sua misura l'assegnare il valore alle unità di misura di tutte le quantità ch'entrano nel calcolo, ed alla gravità medesima. Coll'uso però di tali unità di misure tutte le quantità concrete x , y , Π , p , q , ecc. de' precedenti calcoli verranno ad esprimersi per via di numeri astratti che additeranno il rapporto di ciascheduna quantità all'unità della sua specie; e sarà perciò lo scioglimento dell'idraulico problema ridotto a semplice maneggio di numeriche cifre.

Contemplandosi il movimento dell'acqua nello stato di permanenza, dove passerà acqua in un istante, quivi passerà sempre, e sempre colla medesima velocità e direzione. Dato perciò il valore numerico alle ordinate x , y di qualsivoglia punto della corrente, atteso che rimane colla x determinata anche la corrispondente λ , e le altre quantità costanti si suppongono date in numeri, le equazioni degli articoli 63, 65 e 66 serviranno ad esprimere parimente in numeri le velocità p , q , v che l'acqua ha in tal punto, ed eziandio la pressione Π che vi esercita.

68. Se là dove si fa cominciare la verticale y , sia nulla la velocità dell'acqua ed anche la pressione, sarà ivi $gy = 0$, $(v) = 0$, $(\Pi) = 0$; ma al di sotto di questo livello prendendo la gy un valore, converrà per l'equazione (q) che ne abbia uno anche la Π , ovvero la v ,

ovvero ambidue, di maniera che trovisi sempre $gy - \Pi = \frac{1}{2}v^2$. Quindi è che $\Pi = gy$ renderà $\frac{1}{2}v^2 = 0$, ed all'opposto $\Pi = 0$ darà $\frac{1}{2}v^2 = gy$; onde comprenderemo che al discendere che fa la pressione dal sommo suo valore fino al nulla, innalza la forza viva e la velocità dal nulla fino al massimo; ed al contrario nel salire che fa la pressione dal nulla al massimo valore, abbassa la forza viva e la velocità dal più alto suo valore fino al più basso, vale a dire fino allo zero. Onde si può considerare che la pressione a misura che si va consumando, si trasmuti in un doppio valore di forza viva; e questa, con contrario effetto allo scemare, in quella si trasmuti.

Qui si suppone, come ognun vede, che la y rimanga frattanto invariabile; se però al variare della v può crescere o calare anche la y , dovendo sempre averarsi la equazione $gy - \Pi = \frac{1}{2}v^2$, si conoscerà che quanto impicciolisce la forza viva v^2 , altrettanto ingrandisce la pressione Π , o altrettanto cala l'altezza viva gy , ovvero cresce in una parte la pressione, e per l'equivalente altra parte cala in vece l'altezza viva: onde si può considerare che la forza viva nel consumarsi venga convertita o in pressione o in altezza viva negativa, vale a dire in salita, o parte in una e parte in altra; e si troverà all'opposto

che nel crescere e riprodursi o consuma altrettanto di pressione, o genera in cambio altrettanta discesa o forza viva; ovvero consuma parte di quella, e supplisce pel resto inducendo l'equivalente di questa.

69. Alla superficie libera del fluido è sempre $\Pi = 0$, quivi adunque nella fatta supposizione di $(v) = 0$, $(\Pi) = 0$ avremo per l'equazione (q)

$$gy = \frac{1}{2} v^2; \quad 2gy = v^2.$$

Di qua è venuto l'uso dagl' Italiani Idraulici introdotto di rappresentare le velocità dell' acqua corrispondenti a diverse altezze vive per mezzo della parabola; imperocchè se intenderemo descritta una parabola coll' asse delle y verticale, e col parametro $= 2g$ (numero che secondo le premesse esprimerà tante unità lineari, vale a dire tanti metri), mentre le ascisse y additeranno le altezze dell' acqua, le ordinate x daranno la misura delle corrispondenti velocità. Egli è però chiaro che questo non si avvera, se non se là dove $\Pi = 0$, vale a dire alla superficie libera, qual sarebbe la sezione di una cateratta, per la quale l' acqua sbocchi a libera cascata; onde si scorge l' abbaglio comune dei nostri Scrittori di cose fluviali, i quali hanno creduto di poter adattare questa legge anche alle acque de' fiumi secondo la diversa profondità alla quale si trovano sommerse sotto la suprema superficie, di qua

argomentandosi che la velocità crescesse come la radice dell'altezza d'acqua soprastante; mentre sotto la superficie d'un fiume la pressione Π che soffrono le acque non è mai $= 0$, anzi tanto più cresce, quanto cresce la loro profondità o l'altezza delle acque sovrapposte.

Del resto, ovunque piaccia di collocare l'origine delle y , se alla $y=0$ corrisponde un valore della (Π) e della (v) , non si avrà che a pigliare un'altezza costante, che noteremo α , tale che sia $g\alpha = (\Pi) + \frac{1}{2}(v)^2$, perchè l'equazione (q) per la superficie libera si trasformi nella $g(\alpha+y) = \frac{1}{2}v^2$; onde la parabola rappresenterà ancora le velocità, purchè abbia il suo vertice alla sommità di α , e siano le ascisse $\alpha+y$ in vece di y .

70. Partendo da un punto A della superficie del fluido, ove l'acqua sia senza pressione e senza moto, vale a dire ponendo in A l'origine delle altezze vive y , e trasferendoci ovunque ad un punto C sotto la medesima superficie, qui troveremo

$$gy = \Pi + \frac{1}{2}v^2.$$

Se in vece di venire dal punto A della superficie libera dell'acqua stagnante, fossimo partiti da altro qualunque punto B della corrente posto sotto il livello di quella, tal che fosse l'altezza viva di B sopra $C = \zeta$, notando

(Π) e (v) la pressione e la velocità dell'acqua in B , avremmo in cambio trovato per l'equazione (q)

$$g\zeta + (\Pi) + \frac{1}{2}(v)^2 = \Pi + \frac{1}{2}v^2.$$

Dal che si comprende, come, onde che piaccia di far mossa col calcolo, sia dalla superficie libera dell'acqua stagnante, sia da qualsivoglia altro luogo dell'acqua corrente, rinverremo sempre per un qualunque dato punto del fluido la medesima pressione e la medesima velocità o forza viva, purchè nel secondo caso alla corrispondente altezza viva ζ si aggiunga la pressione e la mezza forza viva che ha l'acqua al sito, onde muove il calcolo.

71. Tutte queste equazioni derivate dalle primarie (l), (m) dipendono soltanto dalla condizione, cui è soggetto il movimento del fluido, di secondare cioè le sponde del canale che lo contiene, ovvero le due qualunque superficie piane, alle quali si considera obbligato di conformare il suo moto: in esse perciò non è contemplata che quella resistenza la quale nasce dalla semplice direzione del moto che il fluido deve seguire per adattarsi a' medesimi piani. Di genere affatto diverso è la resistenza che la corrente può incontrare per gli ostacoli disseminati sopra gli stessi piani, i quali convertendo il movimento regolare in onde irregolari fra loro contrastanti, fanno sì che per esse una parte della velocità e forza viva, di cui

le acque sono animate, resti di netto distrutta senza che si cangi nè in salita, nè in pressione, come fa quella che si estingue in virtù della semplice forma del canale. Tali sono le resistenze cui soggiacciono i fiumi a cagione degli impedimenti sparsi sopra il loro letto; onde vediamo che, sebbene essi abbiano elevatissime le origini, pure ne' tronchi inferiori sono lungi a gran pezza dall' avere la velocità o la pressione a tanta altezza corrispondente.

DEL MOVIMENTO E DELLA MISURA
DELLE
ACQUE CORRENTI.

PARTE SECONDA
FISICO-MATEMATICA E SPERIMENTALE.

CAPITOLO PRIMO.

Idea generale del movimento delle acque correnti.

72. **L**E acque dei fiumi, dei torrenti, dei rii, dei fossati, dei borri medesimi, e generalmente di qualsivoglia canale, piccolo o grande ch'è sia, e dalla natura o dall'arte scavato, discorrono in guisa che il principalissimo loro movimento sia diretto lunghezzo il canale, vale a dire a seconda del suo asse longitudinale, ed i movimenti trasversali di qua, di là, di su in giù od al contrario riescano sempre al suo paragone piccolissimi. Inoltre, eccetto particolari accidenti che qui non dobbiamo contemplare, l'universalità delle acque correnti negli alvei naturali o artificiali si muove in modo che la principal

..

loro velocità a seconda dell'asse longitudinale sia pressochè costante per lunghi tratti di corso, e nei tronchi più regolari di fondo piano ed uniforme anche in tutta l'ampiezza dell'alveo, o poco meno; e nei tronchi men regolari essa è quasi costante per quel tratto d'ampiezza almeno, pel quale corre il massimo e più poderoso corpo dell'acqua, di cui principalmente importa di conoscere il moto. A tutti però i fiumi ed a tutte le acque correnti appartiene in generale il caso contemplato agli articoli 29 e 30; e nell'indagine del loro movimento si potrà trattare la $pDx + qDy + rDz$ qual differenziale esatto; onde a tutte le acque correnti sarà generalmente adattabile il calcolo a tal condizione soggetto.

73. In esso noi ci siamo per ora limitati a riguardare il movimento del fluido dipendente da due sole variabili ordinate, quali sarebbero le x, y , considerata la terza z qual costante nel movimento d'ogni fluida stilla, ed a contemplare inoltre come piane le due superficie alle quali terminano le variabili y (art. 33 e 50), il che vale quanto il far muovere la corrente terminata fra quattro superficie piane, due delle quali parallele al piano che passa per gli assi delle x, y , e le altre due a questo perpendicolari, ma ciascheduna in qualsivoglia modo inclinata al piano delle x, z . Figliando l'asse delle x orizzontale, ma longitudinale, e l'asse delle y verticale, le

due superficie parallele rappresenteranno le sponde, e le due inclinate additeranno l'una la superficie suprema, e l'altra il fondo della corrente. Se in vece si prenderanno le y trasversali al letto del fiume, le due superficie considerate parallele saranno la suprema e l'infima di questo, e le due inclinate diverranno le sponde. E sebbene queste nei fiumi non sogliono essere a piombo, possono nondimeno pel movimento dell'acqua considerarsi tali; giacchè si osserva che aste immerse nella corrente anche in vicinanza delle ripe non corrono in banda, ma col corpo diritto, e senza inclinare nè a destra, nè a sinistra; il che dimostra che quelle parti di fluido, le quali si trovano su d'un piano verticale, si attengono movendosi al medesimo; onde il fluido non altrimenti cammina, che se fosse obbligato a strisciarsi rasente i piani verticali.

74. Inoltre le tangenti degli angoli che questi piani fanno col piano verticale che segue l'asse della corrente, sono generalmente quantità assai piccole, e tali molto più sono quelle degli angoli fatti dalla superficie suprema ed infima col piano orizzontale: onde non è difficile il riconoscere, secondo i principj del calcolo, che l'obbliquità delle sponde non deve sensibilmente turbare l'ordine dei fenomeni dipendenti dalla inclinazione della superficie e del fondo, e permutatamente questa non deve sconcertare l'ordine dei fenomeni da quella dipendenti. Perciò col

calcolo a due variabili, secondo che si piglierà la y verticale ovvero orizzontale, si formerà idea dei principali effetti che nascono tanto dalla vicendevole inclinazione delle sponde, quanto dalla pendenza della superficie e del fondo del fiume.

75. Delle tre velocità p , q , r la prima di direzione longitudinale è la massima e quella che costituisce il corso del fiume; giova adunque soprattutto mostrare la variazione ch'essa può soffrire tanto in grazia della pendenza del fondo e della superficie, quanto in virtù dell'obliqua direzione delle sponde. Si consideri pertanto il valore della p a due variabili, quale si trova espresso all'articolo 60, cioè

$$p = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2},$$

ovvero

$$p = \frac{\lambda}{\lambda} \\ - \frac{\lambda}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2 \\ + \dots \dots$$

Sia la y verticale, λ esprimerà l'altezza dell'acqua corrente, che sarà costante in ogni determinata sezione; le sponde saranno considerate parallele. Il primo e principal termine di questo valore sarà $\frac{\lambda}{\lambda}$ indipendente dalla pendenza tanto del fondo, quanto della superficie. Il secondo

termine della p sarà

$$-\frac{\lambda}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2.$$

La grande piccolezza delle m , n fa che i termini successivi riescano incomparabilmente minori di questo, e perciò non apprezzabili. Questo termine adunque rappresenta quella parte della velocità p , la quale deriva, come mostra la sua espressione, dalla inclinazione del fondo e della superficie, di cui le m , n sono le tangenti.

Prendasi ora la y orizzontale, la λ diverrà larghezza del fiume; m , n saranno tangenti dell' obbliquità delle rispettive sponde; e le due superficie suprema ed infima verranno risguardate parallele. In tal caso il termine

$$-\frac{\lambda}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2$$

esprimerà quella parte della velocità p , la quale dipende dalla inclinazione delle sponde.

Facciamo per maggior semplicità cominciare, com'è in nostro arbitrio, la y alla superficie dell' acqua nel primo caso, ovvero all' analoga sponda relativa alla m nel secondo, tornerà in ambidue i casi $\lambda = a$, ed il termine di cui parliamo prenderà questa forma

$$-\frac{\lambda}{a} \left(m + (n-m) \frac{y}{a} \right)^2.$$

Questa espressione ha variabile la y , la quale nel primo assunto sarà la profondità sotto la superficie dell'acqua, alla quale è situato quel filo d'acqua di cui si cerca la velocità, e nel secondo assunto esprimerà la distanza di tal acqueo filo dalla sponda che ha la m per tangente della sua obbliquità. Laonde questo termine nella prima supposizione mostrerà il crescere o il calare che fa la velocità p dell'acqua a diverse profondità sotto la superficie della corrente, e nella seconda ci darà a conoscere quanto cresce o cala la medesima velocità a misura che ci scostiamo da una sponda e ci avviciniamo all'altra. Diamo su di ciò alcuni saggi.

76. Essendo

$$p = \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \left(m + (n - m) \frac{y}{a} \right)^2$$

l'espressione della velocità p dell'acqua, si domanda nel primo assunto, a quale profondità y la velocità cesserà di crescere per cominciare indi a calare, ovvero finirà di calare per crescere di poi, vale a dire a quale profondità corrisponderà il massimo o minimo valore di tal velocità. Facciamo

$$p = \frac{x}{a} - k,$$

$\frac{x}{a}$ essendo quantità costante, e k variabile e positiva. Noi troveremo che $dk = 0$ rende $y = \frac{m}{m-n} a$, ed essendo

$ddk = 2 \frac{(n-m)^2}{a^3} dy dy$, e perciò quantità sempre positiva, conosceremo che alla profondità

$$y = \frac{m}{m-n} a$$

corrisponde il minimo valore di k , e perciò il massimo valore della velocità p .

Allorchè $n = 0$, vale a dire dove il fondo è orizzontale, la massima velocità si trova alla $y = a$, cioè al fondo (rammentiamo che qui non si considera l'effetto degli ostacoli accidentali sparsi sul fondo, de' quali è detto all'articolo 71). Quando $n < 0$, cioè negativa, vale a dire quando il fondo è acclive, la massima velocità regna alla profondità $y < a$, cioè tra la superficie ed il fondo, e sarà precisamente a mezz' altezza, quando $n = -m$. Se il fondo sia in vece declive, cioè $n > 0$, non vi sarà, propriamente parlando, il massimo della velocità, poichè converrebbe cercarlo ad una profondità $y > a$, ch'è impossibile: si troverà per altro che in tal caso la velocità cresce dalla superficie al fondo, senza che qui diventi zero il suo *differenziale* aumento.

Quando $n = m$, il fondo è parallelo alla superficie; ed essendo allora $(n - m) = 0$, il valore della p nell'espressione

$$p = \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \left(m + (n - m) \frac{y}{a} \right)^2$$

diviene indipendente dalla y . Quindi là dove il fondo è parallelo alla superficie del fiume regna la medesima velocità a qualunque profondità dalla superficie fino al fondo.

Si troverà colla medesima facilità che dove $n > m$, il che importa che il fondo sia più pendente che la superficie, la velocità dell'acqua sarà minore al fondo che alla sommità, come all'opposto è più viva all'imo che al sommo della corrente, ove $n < m$ e > 0 , cioè dove il fondo è men declive che la superficie.

Le acque de' fiumi, eccetto rari accidenti di brevissima estensione che qui non si considerano, sempre corrono alla china, perciò la loro superficie è ovunque declive, e la m sempre positiva; ma il fondo avvegnachè a grandi tratti sia sempre pendente, nondimeno in minori intervalli diviso, ora è chino ed ora erto, e perciò qua la n è positiva, là è negativa: tuttavia, per essere il quadrato di questa quantità sempre positivo, si troverà che la velocità dell'acqua al fondo sarà indifferentemente la medesima tanto se questo è declive, come s'è acclive, purchè abbia un medesimo grado, sia di china, sia di erta.

77. Affinchè si conosca a quanto montar possa in natura la differenza che passa fra le contemplate velocità del fondo e della superficie, supponghiamo il caso più favorevole alla velocità del fondo, e che ci dà il massimo divario fra questa e la superficiale, quello cioè del fondo orizzontale

cui corrisponde la $n = 0$. I torrenti, come ognuno sa, sono quelle acque correnti che più abbondano in declività; sia dunque la tangente della pendenza superficiale di un torrente $= 0,04$, quale, per esempio, sarebbe a un di presso quella del torrente Sertà che sbocca nell'Adda sopra il lago di Brivio. Essendo secondo il supposto $n = 0$, $m = 0,04$, facendo nell'espressione della p la $y = 0$, si otterrà la velocità del torrente in superficie

$$p = \frac{x}{a} - 0,0016 \frac{x}{a},$$

e pigliando in vece la $y = a$, si avrà la velocità del torrente al fondo

$$p = \frac{x}{a};$$

onde presa la velocità in superficie $= 1$, sarà quella del fondo $= 1 + 0,0016$, non apprezzando le quantità piccole di secondo ordine per essere impercettibili; talchè l'acqua al fondo non avrà che appena una millesima con sei diecimillesime parti di velocità più che in superficie; differenza per nessun conto apprezzabile.

Se considereremo in vece un fiume che abbia minore pendenza, questo per altro tenuissimo divario diverrà ancora assai più impercettibile. Per esempio il nostro Po allo sbocco del Crostolo, secondo il livello che io ne feci prendere, ha di pendenza $0^{\text{m}},000214$ per ogni metro, cioè quivi si ha la $m = 0,000214$; onde si troverà che

la velocità del fiume al fondo non è maggiore di quella che ha in superficie, se non di 0,000000045; quantità sì piccola che eccede i limiti d'ogni nostra fantasia.

78. Questi aumenti di velocità dalla superficie al fondo, benchè estremamente piccoli, non si ottengono che là dove il fondo sia orizzontale; e siccome questo, preso a grandi tratti, è generalmente parallelo alla superficie, nel corso generale de' fiumi e de' torrenti sparisce del tutto anche questa tenuissima differenza tra la velocità delle acque in superficie e la velocità delle acque al fondo.

Ben si vede che tutto ciò dipende dalla piccolezza della m , ch'è la misura del declive che hanno le acque in superficie; quindi è che ovunque questa quantità sia di notevole grandezza, rimanendo la $n = 0$, o almeno assai minore della m , la velocità, di cui parliamo, riesce al fondo considerabilmente maggiore che alla superficie, come mostrano le osservazioni fatte, ove l'acqua in superficie assai s'inclina, per esempio, sotto i ponti che restringono alla corrente il passaggio, all'estremità delle moli al suo impeto opposte e simili.

79. Noi finora non abbiamo parlato che della velocità p , vale a dire di quella che ha una direzione orizzontale e parallela all'asse delle x ovvero della corrente; ma quanto abbiamo detto degli accidenti di questa si accomuna eziandio alla velocità assoluta che abbiamo notata v . Imperocchè

essendo (art. 63)

$$v = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}},$$

e perciò

$$v^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1+A^2},$$

ed esprimendosi anche

$$p = \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+A^2},$$

egli è chiaro che al variare della A , vale a dire della y in essa compresa, quando crescerà la p , crescere dovrà ancora la v , e quindi anche la v ; ed al calare di quella calerà ancora il valore di questa; e quando l'una giugnerà al massimo suo valore, arriverà alla massima sua grandezza anche l'altra: nè altra disparità passerà fra le variazioni dell'una e dell'altra, se non che quelle della seconda saranno soltanto la metà degli aumenti o decrementi della prima a cagione del segno radicale che entra nell'espressione della v . Di qua si conosce l'errore di que' nostri Idraulici i quali fino al dì d'oggi hanno creduto che la velocità de' fiumi dalla superficie discendendo verso il fondo andasse crescendo come la radice della profondità, vale a dire in proporzione della $\sqrt{y}$, il che conferma quanto abbiamo avvertito in altro precedente articolo. Si vede adunque come col premesso calcolo vengono ad essere determinati gli accidenti ai quali può soggiacere la velocità assoluta dell'acqua in virtù della varia pendenza del fondo e della superficie.

80. Allo stesso modo considerando l' obbliquità delle sponde in vece della pendenza delle superficie suprema ed infima della corrente, e risguardando queste fra loro parallele, si troverà che il massimo valore della p e quello insieme della v corrisponde al caso della

$$y = \frac{m}{m-n} a,$$

m e n qui denotando le tangenti degli angoli che le due sponde fanno con un piano parallelo al piano verticale che passa per l'asse della corrente (intendendosi per asse della corrente quella linea presso la quale il movimento de' fili fluidi si avvicina all'andamento parallelo più che altrove); a significando l' intera larghezza del fiume, e y finalmente additando la distanza dalla sponda cui appartiene la m . Quivi dunque corrisponde la velocità più viva della fluida vena, dal che trae la prima origine quel che chiamasi filone della corrente.

Diamo alla m un valore positivo, e negativo alla n , saranno le due sponde oppostamente inclinate e rivolte ambedue verso l'asse della corrente, al quale andranno avvicinandosi; se pertanto sarà $m = -n$, avremo $y = \frac{1}{2} a$, cioè là dove le due sponde sono egualmente inclinate verso l'asse, il filone tiene il mezzo del canale. Dove $m < -n$, sarà $y < \frac{1}{2} a$, vale a dire se una sponda

è meno inclinata verso l'asse della corrente, che l'altra opposta, il filone correrà più vicino a quella che a questa; ed al contrario se $m > -n$, cioè se una sponda sarà all'asse più obliqua, il filone le starà più discosto. Di qua viene ancora che se l'una delle due sponde è concava, l'altra convessa, il filone corre più presso alla prima che alla seconda, perchè la concava nella direzione delle sue parti è meno obliqua che la convessa.

Se poi daremo alla m un valore negativo, e positivo alla n , le due sponde in vece di avvicinarsi scambievolmente all'asse della corrente, andranno più e più dissepandosi da esso, e tra di loro, ma troveremo ancora i medesimi risultamenti; onde le vicende del filone sono le medesime tanto se ambe le sponde pieghino verso l'asse, come se dall'asse si dilunghino, cioè tanto qua dove il fiume si dilata, che là dove si restringe.

Allorchè $m = n$, le ripe sono parallele fra loro; $n - m = 0$ fa sparire la y dal termine

$$- \frac{x}{a} \left(m + (n - m) \frac{y}{a} \right)^2;$$

onde siamo avvertiti che regna la medesima velocità in tutta la larghezza del canale, e non vi ha filone (non venendo qui contemplato l'effetto degli accidentali intoppi aderenti alle sponde, ed il fondo essendo considerato acclive o declive soltanto a seconda della corrente). Ma, senza

andare più innanzi in queste considerazioni, basti riflettere che gli effetti dell' obliqua direzione delle due sponde sono perfettamente analoghi e corrispondenti agli effetti della pendenza del fondo e della superficie flumale; onde quanto si dice degli uni, si appropria ancora agli altri.

81. Gettando pure un'occhiata sopra l'espressione della velocità q (art. 61), ch'è trasversale rispetto allà direzione dell'asse della corrente, conosceremo essere il primo termine del suo valore

$$q = \frac{\chi}{\lambda} \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right),$$

ovvero prendendo, come già facemmo, $\lambda = a$

$$q = \frac{\chi}{a} \left(m + (n-m) \frac{y}{a} \right),$$

il quale, come si vede, dipende interamente dalle inclinazioni espresse per m , n delle due superficie alle quali queste quantità appartengono; il secondo termine della q , ch'è il massimo fra i successivi, non è punto apprezzabile, perchè riesce quantità piccola dell'ordine di m^2 . Pigliando la y verticale, la q accenna il movimento che fa l'acqua salendo o discendendo; prendendo la y orizzontale, la q esprime quel movimento dell'acqua col quale tende a scostarsi da una ripa andando verso l'altra, onde facilmente si conoscerà che facendo nell'equazione variare la y , otterremo nel primo caso il movimento che ha l'acqua

di su in giù, o di giù in su alla profondità $= y$; e nel secondo caso a qualunque distanza y dalla sponda relativa alla m avremo il moto trasversale, col quale in tal sito dell'alveo l'acqua va scostandosi da un lato per avvicinarsi all'altro.

82. Agevolmente ci accorgeremo ancora che diviene la $q = 0$, dove $y = \frac{m}{m-n} a$. E poichè la q presa sotto il doppio suo aspetto, e fatta $= 0$ rende paralleli fra loro i fluidi fili, la $y = \frac{m}{m-n} a$ corrisponderà all'asse della corrente, intorno al quale i fluidi fili rendonsi appunto paralleli; ma abbiamo veduto che alla $y = \frac{m}{m-n} a$ si trova la massima velocità; dunque il corso più vivo del fiume corrisponde all'asse della sua corrente.

83. Da questi pochi saggi abbastanza si comprende come per mezzo del calcolo venghiamo in cognizione de' principali fenomeni che accompagnano il movimento de' fiumi, e ci è dato ancora di chiarirci intorno a quegli elementi del corso, dai quali può dipendere la misura delle loro acque.

CAPITOLO II.

Nozione generale della misura delle acque correnti.

84. Quanto abbiamo dimostrato nel capitolo precedente intorno alla velocità delle acque correnti e de' fiumi, che prescindendo dall' effetto di ostacoli accidentali suol essere la medesima tanto alla superficie, che a qualunque profondità sotto di essa ed al fondo, e la medesima pure su tutta la larghezza del fiume, ovunque le sponde siano parallele, ed il fondo piano ed inclinato soltanto pel verso dell' asse della corrente, potrebbe additare un modo per misurare le acque correnti agevolissimo, quello cioè di scegliere un tronco più regolare che aver si possa, vale a dire di ripe parallele e di fondo su tutta la larghezza uniforme, e di scandagliare in tal sito per mezzo di galleggianti la velocità superficiale, la quale, moltiplicata per la sezione dell' acqua corrente, ci darebbe prossimamente la sua quantità; dico prossimamente, poichè a cagione degli ostacoli seminati sul fondo e sopra le ripe la velocità in vicinanza dell' uno e delle altre soffre qualche ritardo, il quale però è cosa tanto più piccola, quanto il fondo (da cui muove la maggior cagione del ritardamento) è men aspro, e la corrente men bassa. Ma noi parlando qui di misura delle acque correnti, non intendiamo di ragionare particolarmente intorno al modo di scandagliare, comunque

si sia, la special quantità di acqua che discorre per qualche canale, o rivo, o fiume, bensì della maniera rigorosa di misurare e di dispensare a giusta misura qualunque quantità di acqua ad arbitrio si domandi; talmente che il metodo, del quale si tratta, sia adatto non solo a definire, qualora piacesse, la quantità di fluido che porta una corrente, ma a dividerla in quali e quante assolute porzioni siano a beneplacito richieste, ovvero a separarne qualunque quantità in quella misura che si voglia, come si misura e si stacca da una pezza di panno quel che si vende a taglio. L'arte adunque di cui si favella è generale per qualunque quantità di acqua ad arbitrio domandata, non particolare per quella soltanto che la natura o l'industria dell'uomo abbia per sorte somministrata a qualche canale; anzi della misura speciale di quest'ultima poco o nulla sarà quinci al nostro scopo generale per calere.

85. Ogni misura suppone l'unità alla quale si riferisce, perciò la misura delle acque correnti dovrà riportarsi ad un cubo di acqua considerato per unità di solido avente per lato l'unità lineare, il quale passi in un certo tempo preso parimente per unità di sua durata. Secondochè per la sezione di un'acqua corrente trapassi nell'unità di tempo uno, due o tre tali cubi di acqua, si dirà essere uno, due o tre la sua quantità. Onde si vede che nella stima

di questa entrar deve la considerazione di due elementi ,
 ciò sono la grandezza della sezione e la velocità dell'acqua nel traversarla. La prima abbraccia tutte le sezioni delle vene capillari che costituiscono il corpo della corrente , la seconda è riposta nel movimento di ciascheduna vena capillare , il quale può essere nell' una più celere , e nell' altra meno. Per valutare adunque la quantità dell' acqua che passa per l' intera sezione di una corrente bisogna conoscere la velocità di cui è animata ogni vena capillare al passaggio per la corrispondente sua sezione. Ma non basta conoscere in tal modo la velocità assoluta di ogni fluido capello , facendo mestieri sapere la sua direzione per dedurne quella velocità che ne risulta perpendicolarmente al piano della sezione medesima ; poichè questa sola , e non altra , moltiplicata pel corrispondente elemento di sezione esprime la quantità elementare di acqua da ciascheduna vena capillare tramandata : la somma poi di tutte queste quantità elementari somministrate dalla generalità delle fluide vene è quella appunto che costituisce la totale quantità dell' acqua che passa per l' intera sezione della corrente.

86. Immaginiamo adunque una corrente di acqua , che secondo le condizioni espresse nell' articolo 73 cammini per un canale di sponde perpendicolari e fra loro equidistanti , di fondo piano acclive o declive , e parimente

con superficie piana comunque anch' essa pel verso della corrente inclinata. In questo movimento sia la $pDx + qDy$ differenziale esatto, come per lo meno lo sarà, sempre che le m, n , vale a dire le inclinazioni della superficie e del fondo siano assai piccole; poichè allora essendo la variazione della p , che dipende dalle m, n , quantità assai piccola, si può questa velocità considerare o come costante, o come funzione della sola x : ed essendo per la medesima ragione assai piccola anche la q , il differenziale, di cui si parla, potrà essere trattato qual differenziale esatto (art. 30) (*). Sarà pertanto adattabile a questa corrente il nostro calcolo.

Essendo le sponde del canale parallele, avremo la sua larghezza z costante, ed il movimento del fluido da essa indipendente. Notiamo L questa larghezza, e ad un qualunque punto della x immaginiamo la corrispondente sezione verticale $L\lambda$ della corrente, λ dinotando la sua altezza. Poichè il movimento è indipendente dalla variabile z , a qualunque assegnata profondità y sotto la superficie l'acqua passerà per la sezione colla medesima velocità in tutta la sua larghezza; onde la quantità dell'acqua che nel tempo $= 1$ passerà per un elemento LDy della sezione medesima, sarà $LpDy$, p indicando la velocità in

(*) Vedi inoltre la citata annotazione quarta.

direzione perpendicolare al piano della sezione e corrispondente alla profondità y . La copia adunque dell'acqua che nell'unità di tempo scorrerà per l'intera sezione, vale a dire la quantità dell'acqua somministrata dalla corrente nel tempo $= 1$ sarà $= L \int p Dy$.

Ponendo qui in vece della p il suo valore indagato all'art. 60, la quantità dell'acqua corrente che nomineremo Q , verrà espressa nel seguente modo:

$$Q = L \frac{\lambda}{\lambda} \int \frac{Dy}{1 + \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2};$$

e potendosi, come già avvertimmo, far cominciare la y alla sommità della contemplata sezione, che ha λ per altezza, nel qual caso diviene $a = \lambda$, verrà

$$Q = L \frac{\lambda}{\lambda} \int \frac{Dy}{1 + \left(m + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right)^2}.$$

Ed integrando

$$Q = L \frac{\lambda}{n-m} \text{Arc. tang.} \left(m + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right) + \text{cost.}$$

La costante è quella che rende $Q = 0$, dove $y = 0$; dunque

$$\text{cost.} = -L \frac{\lambda}{n-m} \text{Arc. tang. } m;$$

conseguentemente

$$Q = L \frac{\lambda}{n-m} \left\{ \text{Arc. tang.} \left(m + (n-m) \frac{y}{\lambda} \right) - \text{Arc. tang. } m \right\}.$$

Facendo adunque nell'integrale $y = \lambda$, otterremo la totale

quantità dell'acqua, che nel tempo $= 1$ fluisce per tutta la sezione della corrente, determinata come segue:

$$Q = L \frac{\chi}{n-m} \{ \text{Arc. tang. } n - \text{Arc. tang. } m \}.$$

87. Rendiamo ancora più semplice quest'espressione col fare $n=0$, cioè coll'aggiustare al canale un fondo orizzontale; con questo spediente verrà

$$Q = L \frac{\chi}{m} \text{Arc. tang. } m.$$

Per avere adunque la misura della quantità Q dell'acqua converrà conoscere la m e la χ . Ora se la superficie sopra della corrente è libera, la m non si potrà conoscere senza la misura effettiva dell'angolo d'inclinazione che quella fa coll'orizzonte: tal misura non potrà aversi se non con un mezzo puramente meccanico, il quale sarà soggetto ad incertezze da questo inseparabili; inoltre per poco che quest'angolo fosse considerabile, la superficie dell'acqua riuscirebbe curva, non piana, come nel calcolo si assume; e perciò non si potrebbe con sicurezza adattare al caso il costrutto di questo. Se poi la superficie non è libera, talchè la sua inclinazione sia determinata da un piano resistente che formi coperchio al canale, potendosi ad esso dare quel grado d'inclinazione che piace, supporremo nota la m ; ma in tal caso può rimaner dubbio che talvolta la superficie della corrente ad esso non si adatti. Quell'incertezza di misura che può cadere sopra

il grado d'inclinazione della superficie additato dalla m , cade egualmente sopra il valore della χ , il quale dalla m dipende (art. 66). Ma lasciando anche da canto queste e simili altre considerazioni sopra la determinazione delle m , χ , il metodo di far dipendere la misura della quantità d'acqua dalla ricerca d'un arco di cerchio corrispondente alla tangente di un angolo manca di quella semplicità che a ragione si può in simile faccenda desiderare; e non porta seco il carattere di una evidenz., che non solamente sia matematica, ma eziandio oculare, la quale sola è acconcia ad appagare l'uomo volgare che suole avervi interesse.

88. Ben diversamente camminerà il negozio, se stando $n = 0$, si renderà anche $m = 0$, facendo che la superficie libera dell'acqua discorra orizzontale. Allora l'equazione dell'art. 61 ci dà

$$q = 0;$$

onde tutte le vene capillari dell'acqua corrente hanno un movimento orizzontale. Inoltre l'equazione dell'art. 60 si trasmuta in

$$p = \frac{\chi}{\lambda},$$

nella quale non si contiene la variabile y ; per lo che tutte le vene capillari dalla sommità dell'acqua fino al fondo hanno la medesima velocità diretta secondo l'asse delle x , ch'è l'asse della corrente. Dal che segue che la quantità dell'acqua dalla corrente somministrata rimane determinata

dalla sua sezione verticale moltiplicata per la velocità; quindi è

$$Q = pL\lambda = L\chi,$$

a sì semplice espressione riducendosi la precedente formola

$$Q = L \frac{\chi}{m} \text{Arc. tang. } m,$$

atteso che all'impicciolirsi ed annientarsi d'un angolo, divenendo l'arco eguale alla sua tangente, quando $m=0$, l'espressione fassi

$$Q = L \frac{\chi}{m} m = L\chi.$$

89. Ed è qui da osservare, 1.° che fatta $m=0$, divenendo $q=0$, $p=const.$ rimane insieme perfettamente compiuta la condizione dell'integrale esatto, di cui è detto all'art. 30; 2.° che quanto spetta alla fisica giustezza della misura, si ottiene il medesimo valore della Q , ancorchè non sia a rigore $m=0$, ma rimanga ancora $m=a$ qualche sensibile quantità, purchè tale che sia permesso di prendere indifferentemente la tangente dell'arco per l'arco stesso.

90. Se la superficie libera di una corrente, là dove si fa $y=0$, si trovi sotto il livello d'una superficie parimente libera, ove l'acqua suprema della corrente dando nell'opposto ostacolo perda ogni moto, e sia in tal sito la differenza costante di livello delle due superficie $=a$; per essere

quivi $y=0$, l'equazione dell'art. 69 $g(a+y)=\frac{1}{2}v^2$ si trasmuterà nella

$$ga=\frac{1}{2}v^2;$$

onde $v=\sqrt{2ga}$. Essendo poi $q=0$, sarà $v=\sqrt{(p^2+q^2)}=p$. Quindi vien noto il valore della $p=\sqrt{2ga}$; e perciocchè sia (art. 88) $p=\frac{\chi}{\lambda}$, avremo

$$\chi=\lambda\sqrt{2ga};$$

onde

$$Q=L\lambda\sqrt{2ga}.$$

Se pertanto potremo avere un' altezza qualunque a di acqua ridotta in tal modo stagnante sopra il livello della superficie della corrente, sarà in nostro potere il dare a questa quella velocità $=\sqrt{2ga}$ che più ci aggrada. Prendasi dunque $a=\frac{1}{2g}$, sarà $\sqrt{2ga}=1$, cioè la velocità della corrente sarà quella che vien presa per unità $=\frac{\text{met.}}{2}$ (art. 67), e la formola precedente diverrà

$$Q=L\lambda,$$

vale a dire la sezione $L\lambda$ della corrente ci dirà ella medesima di netto la quantità dell'acqua che la corrente trasporta nell'unità di tempo.

91. Ognun vede che non ci può avere misura d'acqua corrente più semplice di questa. Qualunque uomo nelle matematiche inesperto, potendo coll'occhio discernere come

l'acqua nel canale si muova a guisa di un solido perfettamente squadrato, non ha che a prendere la misura dell'altezza e della larghezza della corrente per riconoscere con puntualità e con certezza la quantità dell'acqua che tramanda. Questo spediente adunque offre in generale la miglior maniera per misurare e dispensare qualunque quantità di acqua ad arbitrio si domandi; poichè non fa mestieri, se non che data in numeri tal quantità, ad essa in numeri si uguagli il prodotto dell'altezza colla larghezza della sezione del canale pel quale deve colle descritte condizioni passare.

92. I rivi ed i fiumi corrono naturalmente colla superficie quasi del tutto orizzontale; per rendere ben piano ed a livello anche il loro fondo, e per dar loro le sponde diritte e verticali a fine di poter misurarne le acque, si è immaginata l'idea del Regolatore, che sarebbe un breve tronco di canale fatto ad arte entro l'alveo della corrente a sponde perpendicolari e parallele, e con fondo perfettamente orizzontale, pel quale si costringerebbe tutta l'acqua a passare. Ma nel restringere con tal macchina l'alveo del rivo si rende obliqua la direzione delle vene capillari di tutta la corrente, inflettendosi le une contro le altre; il che più non permette di ottenere la misura fedele dell'acqua col prodotto della sua sezione nella velocità. Si conoscerà a suo luogo per qual cagione il nostro canale non andrà punto soggetto a simile inconveniente.

Continuazione del medesimo argomento.

93. Il precedente nostro concetto mira, come si vede, ad usare un canale per misuratore dell'acqua: altra maniera di misura si può indagare, la quale consista nel far alla libera sgorgare l'acqua da una luce di nota grandezza, ed incisa in un piano verticale presentato alla corrente, come qui ci faremo ad esporre.

Sia per maggior semplicità la luce di forma rettangola con due lati orizzontali e due verticali. Sopra di essa s'intenda arrestata l'acqua per l'opposizione del piano verticale, formandovi quel che suol chiamarsi battente, colla superficie stagnante. Se il vano della luce sia libero, talchè l'acqua che sbocca si trovi pensile in aria o in niuna parte da che che sia sostenuta, nel piano di essa rinscirà nulla la pressione, cioè $\Pi = 0$; quindi segnando a l'altezza cui sale il battente sopra il labbro superiore della luce, per ogni punto della sua sezione situato alla profondità y sotto il medesimo labbro avremo la velocità assoluta dell'acqua, che ci passa, espressa per

$$v = \sqrt{2g(a + y)},$$

ed una parabola che abbia il vertice alla sommità dell'acqua stagnante, ove comincia l'altezza notata a , ed il parametro $= 2g$ potrà colle sue ordinate orizzontali rappresentare

le velocità dell'acqua corrispondenti a tutt' i punti della sezione (art. 69). Di- qua viene il noto comun metodo di calcolare la quantità dell' acqua sgorgante dalla luce , la quale si ritiene espressa per lo spazio medesimo compreso fra la linea parabolica ed il suo asse.

94. Per dare col nostro calcolo qualche idea di questa maniera di misura , supponghiamo , secondo il suo assunto , che nello sgorgamento della fluida copia sia nullo il movimento dell'acqua secondo uno dei tre assi , per esempio secondo quello delle z , talchè alle due estremità di questa ordinata la corrente abbia colla direzione del moto a radere due superficie parallele fra loro e col suo asse. Preso , come già usammo , l'asse delle x per asse longitudinale della corrente o vena sgorgante , e quello delle y per trasverso , le due superficie dalla fluida vena secondate col suo moto alle estremità della y si considerino piane , poste ad angoli retti al piano formato dagli assi delle x , y ; ma l'una e l'altra comunque inclinata al piano degli assi delle x , z ; tutto in somma sia analogo alle condizioni degli articoli 73 e 86.

Si noti L la distanza delle due superficie parallele , che sarà la larghezza della luce che dà l'uscita all'acqua , LDy sarà l'elemento *differenziale* della sezione della luce , e per esso passerà una lastretta elementare di fluido. Secondo le premesse p indicherà la velocità della lastretta

in direzione perpendicolare al piano della luce, mentre v esprimerà la sua velocità assoluta, la quale riescirà di direzione obliqua al piano medesimo. Facilmente s'intenderà essere $\frac{P}{v}$ il seno dell'angolo che la lastretta forma col piano della sezione; quindi $\frac{P}{v} Dy$ esprimerà la grossezza della lastretta che passa per l'elemento Dy della sezione medesima; e $L \frac{P}{v} Dy$ sarà la sezione elementare della lastretta presa perpendicolarmente alla direzione del suo moto.

La sezione adunque della corrente che taglia ad angoli retti tutte le fluide lastrette che la formano, cioè la somma di tutte le sezioni elementari delle lastrette prese a squadra colle rispettive direzioni del moto starà alla sezione o grandezza della luce come

$$\int L \frac{P}{v} Dy : \int L Dy.$$

Ora egli è chiaro che se le fluide lastrette, le quali si muovono obliquamente le une verso le altre, nell'incontro si raddrizzassero il corso, salva la loro velocità, la sezione $\int L \frac{P}{v} Dy$ della corrente diverrebbe disposta ad angoli retti colla direzione del moto comune a tutte le fluide vene capillari. Tale sezione del corso raddrizzato è quella che suole chiamarsi col nome di *vena contratta*; essa è la vera sezione dell'acqua sgorgante dalla luce, poichè vien presa a dovere, vale a dire ad angoli retti

a tutte le sue minute fila; a differenza della sezione della luce medesima, la quale, riferita al corpo dell'acqua che la traversa, non è che sezione viziosa e fallace, perchè riesce presa in isbiescio per rispetto alle capillari fila della fluida scaturigine. Noi chiameremo per legittimo contrapposto *vena lata* questa sezione della luce; onde la vena contratta starà alla vena lata nella ragione di

$$L \int \frac{P}{v} Dy : Ly.$$

95. Sia pertanto m la tangente dell'angolo che una delle due superficie inclinate fa col piano degli assi delle x, z , e n la tangente dell'angolo fatto parimente dall'altra superficie: l'espressione della $\frac{P}{v}$ sarà (art. 63) $\frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}}$, pressa $A = m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda}$; donde si ricava

$$L \int \frac{P}{v} Dy = L \frac{\lambda}{n-m} \int \frac{DA}{\sqrt{(1+A^2)}},$$

ed integrando

$$L \int \frac{P}{v} Dy = L \frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)} - A} + \text{cost.},$$

cioè surrogando ad A il suo valore

$$= L \frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda}\right)^2\right\}} - \left(m \frac{a}{\lambda} + (n-m) \frac{y}{\lambda}\right)} + \text{cost.}$$

Ponendo il principio della y alla superficie della corrente nel punto cui corrisponde l'altezza a , l'integrale

dovrà farsi $= 0$, quando $y = mx = m \frac{\lambda - a}{n - m}$, ed avere il suo compimento dove $y = a + nx = \frac{n\lambda - ma}{n - m}$. Diversamente se, come altrove usammo di fare, si ponga l'origine della y alla sommità dell'altezza λ , talchè si abbia $a = \lambda$, l'integrale avrà il suo cominciamento dove $y = 0$, ed il fine dove $y = \lambda$. All'uno ed all'altro assunto corrisponde il medesimo avvenimento; appigliamoci dunque al secondo, ch'è il più semplice; onde avremo l'espressione generale dell'integrale come segue:

$$L \int \frac{p}{v} Dy = L \frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(m + (n-m) \frac{y}{\lambda}\right)^2\right\} - \left(m + (n-m) \frac{y}{\lambda}\right)}} + \text{cost.}$$

La costante è quella che rende l'integrale $= 0$, quando $y = 0$, onde

$$\text{cost.} = L \frac{\lambda}{n-m} \log. \left(\sqrt{1 + m^2} - m \right);$$

facendo perciò terminare l'integrale colla $y = \lambda$, si otterrà

$$L \int \frac{p}{v} Dy = L \frac{\lambda}{n-m} \log. \frac{\sqrt{1 + m^2} - m}{\sqrt{1 + n^2} - n}.$$

Dunque la vena contratta sta alla vena lata Ly , cioè $L\lambda$ nella ragione di

$$\frac{1}{n-m} \log. \frac{\sqrt{1 + m^2} - m}{\sqrt{1 + n^2} - n} : 1,$$

la quale allorchè $n = -m$, vale a dire quando l'inclinazione delle due superficie è la medesima, ma in verso

opposto, come generalmente suol succedere nelle naturali contrazioni di vena, si converte nella seguente

$$-\frac{1}{2m} \log. \frac{\sqrt{(1+m^2)}-m}{\sqrt{(1+m^2)}+m} : 1,$$

cioè

$$\frac{1}{2m} \log. \frac{\sqrt{(1+m^2)}+m}{\sqrt{(1+m^2)}-m} : 1.$$

Si osservi che in questo rapporto della vena contratta alla vena lata non entra nè la grandezza LA della bocca o cateratta dalla quale scorga l'acqua, nè la velocità p , ovvero v del fluido; ma ci ha soltanto le tangenti m e n degli angoli che le due superficie inclinate fanno col piano degli assi delle x , z . Dunque salva in qualsivoglia modo la grandezza di questi angoli, la vena contratta conserva una ragione costante alla vena lata, qualunque sia la grandezza della luce o cateratta per cui sorte l'acqua, e qualunque sia la velocità di questa, ed in conseguenza qualunque sia ancora l'altezza viva o battente da cui la velocità dipende.

96. Questa dimostrazione, soggetta sempre alla condizione dell'integrale esatto $pDx + qDy$, non è rigorosa se non per la contrazione della vena che farsi secondo un solo asse delle ordinate y , e nel caso in cui allo sgorgare dell'acqua le due superficie inclinate siano piane, come si riconosce dall'assunto donde muove il calcolo. Nulladimeno si consideri valere ancora, s'è possibile, come

alcune sperienze finora istituite sembrano accennare, per la contrazione fatta, come generalmente addiviene, su ambedue le direzioni trasversali della vena parallele agli assi delle y e delle z , e colle superficie curve non piane; e supponghiamo inoltre che i piani tangenti di queste formino alla loro origine angoli costanti coi piani paralleli a quelli degli assi delle x , y e delle x , z .

In tale supposto la nostra dimostrazione sarà adattabile alla contrazione di vena per tutte le grandezze delle bocche rettangole e per tutti i gradi di velocità dello sgorgo, e conseguentemente per ogni altezza di battente. Indagando perciò colla sperienza la ragione che passa fra le vena contratta e la vena lata in una determinata ampiezza di luce, e con un dato battente, saremo certi che questa ragione quadrerà a tutte le luci ed a tutti i battenti, di modo che moltiplicando per essa la sezione di una luce o cateratta qualunque, ch'è la sezione infedele ed illegittima della corrente, noi la convertiremo nella legittima e sincera sezione, qual è quella della vena contratta. Similmente s' intenderà che, trattandosi di quantità d'acqua dalla cateratta versata, quel conto che si fa per calcolarla, moltiplicando ogni menomo elemento di questa per la corrispondente velocità dalla parabolica ordinata espressa, ovvero, il che torna lo stesso, moltiplicando la media velocità parimente dalla parabola additata per l'intera

grandezza della cateratta, conto necessariamente difettoso, atteso che la sezione di questa è obliqua e torta al corso de' fluidi fili, verrà ad essere rettificato e corretto col moltiplicare il suo prodotto per la medesima ragione, vale a dire pel *coefficiente* costante che la esprime.

97. Conoscendosi in tal guisa la quautità dell' acqua che sorte per qualsivoglia luce e con qualsivoglia battente, potrà in generale la grandezza della luce sotto tal battente servire di misura all' acqua corrente. Quindi si potrà ancora talmente assortire la misura di una cateratta e del suo battente, che la massa d' acqua tramandata nell' unità di tempo stia al metro cubo come la sezione della cateratta sta al metro quadrato; nel qual caso la grandezza della luce ci dirà essa medesima la quantità dell' acqua che ci dispensa: dilatando poi o restringendo soltanto la larghezza di questa bocca, salva la sua altezza e salvo il suo battente, dai quali dipende la velocità dell' acqua, egli è manifesto che crescerà o scemerà la quantità dell' acqua nella medesima ragione in cui cresce o cala la grandezza della luce, onde coll' adattare all' uopo la sola larghezza della cateratta potremo conseguire la misura di qualsivoglia quantità di acqua corrente, o potremo da qualsivoglia canal maestro o fiume separare e dispensare l' acqua in quella quantità che si domanda; e nell' uno e nell' altro caso quel numero che esprimerà la grandezza della luce

in metri quadrati o in frazioni di metro quadrato, esprimerà insieme la quantità dell'acqua in metri cubi o in frazioni di metro cubo. Noi parleremo a suo luogo di questo metodo di misura; intanto però si vede ch'esso non ha in suo favore la certezza della dimostrazione, ed è in parte appoggiato a gratuite supposizioni; e sappiamo altronde che la sperienza, la quale sembra avvalorarlo, manca di molto di quella generalità che possa in ogni caso dar bando al dubbio dell'errore; oltre di che tal modo non ci presenta quella semplicità ed evidenza di misura che appagar possa l'occhio volgare di chi vi ha interesse.

CAPITOLO IV.

Diverse pratiche usate in Italia per la misura e dispensa delle acque correnti.

98. Dall'idea generale della misura delle acque correnti passando a dire in particolare delle pratiche usate in Italia per la dispensa delle medesime, noi senza preamboli cominceremo dalla pratica milanese, che a dritto o a torto sembra la più accreditata, e della quale diversi scrittori delle idrauliche cose hanno ragionato.

L'unità di acqua corrente a Milano si chiama oncia, e per essa s'intende quella copia di acqua che passa per una cateratta rettangola, chiamata modulo, alta once 4 del

braccio milanese (metri 0,198), larga once 3 (met. 0,148), con battente di acqua alto once 2 (met. 0,099) sopra il labbro supremo della bocca. Secondo la maggiore o minore quantità di acqua che si vuole dispensare, si dilata o si restringe la larghezza della cateratta, salva la sua altezza e salvo il battente. La fabbrica è come segue: Due sono le cateratte di eguale larghezza, l'una scolpita nella sponda del canale maestro da cui si piglia l'acqua, l'altra posta a traverso dell'acquidotto che la conduce per misurarla; la loro distanza è di braccia 10 (met. 5,949). La prima ha la soglia met. 0,395 più bassa che la seconda; un suolo orizzontale a livello della prima soglia si stende fin sotto la seconda, ove resta un gradino: è però permesso l'unire in vece le due soglie con un piano inclinato, che risparmia la brusca opposizione del gradino. Il tronco del condotto che giace fra le due cateratte, ed è il bottino dell'acqua, è largo met. 0,495 più di queste, cioè met. 0,247 per ogni parte; una soffitta orizzontale, detta cielo morto, lo cuopre, lasciando il vano pel battente; esso però è chiamato tromba coperta. Il modulo è inciso in una lastra di marmo grossa met. 0,148, contornata da sottil lamina di ferro, che pareggia esattamente i labbri del modulo. Il tronco del condotto che sussegue, detto tromba scoperta, ha di lunghezza met. 5,354; la sua larghezza sopravanza quella del modulo met. 0,099 per ogni lato al suo principio,

e met. 0,247 al suo fine; esso ha il fondo depresso sotto la soglia del modulo met. 0,049 alla stremità superiore, e met. 0,099 all'inferiore. Al di là di questo confine nulla è prescritto, e tutto rimane in arbitrio del possessore del rigagno.

La cateratta che tira l'acqua dal canal maestro, ha la sua imposta di legno da alzare o sbassare finchè il livello dell'acqua si alzi met. 0,693 sopra la sua soglia, combaciandosi allora colla soffitta della tromba coperta, e formando lo stabilito battente sopra la cateratta del modulo. Aggiustata una volta l'imposta a sito, quando le acque del canale maestro stanno ad un prescritto segnale, ivi si salda, perchè più non venga smossa, salva l'esigenza della navigazione; tanto almeno è stabilito da' regolamenti per le acque che si derivano da canali di regio diritto.

Nel Pavese si segue la pratica di Milano, salva la differenza del proprio braccio, il quale è di met. 0,62791.

Nel Novarese pure si ritiene l'uso milanese, ma a bottino scoperto e con piccole altre diversità, conservata la misura del braccio del paese, ch'è di met. 0,60621.

Nel Lodigiano l'oncia d'acqua è quella che schizza da una cateratta larga un'oncia a misura del paese (met. 0,03822), alta once 9 (met. 0,34398), e con due once di battente a misura milanese (met. 0,09915).

Il modulo cremonese dell' oncia d' acqua è un' apertura rettangola come le precedenti, alta once dieci, misura del paese (met. 0,4029), larga un' oncia (met. 0,0402), col battente parimente di un' oncia. Quivi il modulo è accompagnato con un canale di eguali dimensioni, lungo met. 4,8353; il tronco che sussegue del rigagnolo alla distanza di met. 72,53 è attraversato da una soglia depressa un' oncia sola sotto il livello della soglia del modulo. Il bottino che si stende dalla cateratta del canal maestro fino al modulo non ha stabilite le misure; ma secondo l' uso è assai più lungo, ed anche più largo che nelle antescritte pratiche.

I Cremaschi usano per lo più il modulo cremonese, toltone il piccolo divario del loro braccio, ch' è di met. 0,46978, dove nel Cremonese è di met. 0,48353.

Ne' diversi paesi ove si usano le descritte pratiche, ed ovunque vengono imitate, non altrimenti che a Milano, si suole aggrandire la larghezza della bocca modellata secondo la copia d' acqua che si vuole dispensare, mantenendo invariabile l' altezza. E se talvolta vien meno la sufficiente vena d' acqua nel canal maestro, si abbassano egualmente le imposte di tutte le sue cateratte, affinchè l' acqua cali in egual misura a tutti i moduli.

99. In tutte le precedenti pratiche usandosi doppia cateratta, l' una cioè alla sponda del canal maestro, e

l'altra al modulo, il tronco dell'acquadotto ad esse intermezzo forma bottino all'acqua. Seguono ora altri usi nei quali non avvi bottino, perchè il modulo s'intaglia nella sponda medesima del canale maestro.

A Bergamo per oncia d'acqua s'intende quella che sgorga liberamente da un foro rotondo del diametro di un'oncia a misura del paese (met. 0,044); il doppio spazio circolare rappresenta le due once, il triplo le tre, e così del resto: sembra scelta la forma circolare dell'orifizio, perchè questa più agevolmente si suole con puntualità descrivere. Non essendo molto varia la profondità alla quale le circostanze de' pubblici canali permettono di collocare le bocche, non è stata prescritta la misura del loro battente; nulladimeno erasi già da gran tempo colà pensato allo spediente di regolare il diametro delle bocche secondo la profondità alla quale piacesse di collocarle, perchè avessero a dare la competente misura dell'acqua; ed io so che a tal fine vi ha già preparate delle tavole che le vicende de' tempi lasciarono oziose.

Nel Piemonte l'acqua si stima a ruote, ed è la ruota d'acqua quella quantità che viene tramandata da una cateratta quadra d'un piede di lato (met. 0,5136). La ruota d'acqua non ha battente, secondo la descrizione che ne fa il signor Michelotti.

Nel Modonese l'unità d'acqua è similmente detta macina, perchè reputata bastevole a volgere una macina; essa è misurata con una luce quadra di un braccio (met. 0,5230) di lato. Può, secondo il prescritto del paese, avere un battente, purchè non sia maggiore di once dieci (met. 0,435). Un'altra minor misura, considerata per la nona parte della macina, porta il nome di bocchetta; la sua cateratta quadra ha per lato il terzo del lato della macina; ma non deve avere battente. L'uso modonese è comune ancora ai Reggiani, se non che presso di questi la misura del braccio equivale a met. 0,5308.

Nel Mantovano l'acqua si dispensa a quadretti. Il quadretto è una cateratta tagliata in quadro con un braccio mantovano (met. 0,4668) di lato, e con due once (met. 0,0778) di battente.

I Veronesi pure misurano l'acqua a quadretti, avendo il quadretto il lato d'un piede (met. 0,3429), ed il battente di due once (met. 0,0571). La misura veronese è usata anche dai Mantovani per le acque del Tartaro.

A Brescia parimente l'unità di acqua corrente vien detta quadretto, e per esso s'intende quel corpo di acqua che scorre per un canale di certa pendenza coll'altezza e larghezza di un braccio (met. 0,47099), come riferisce il Baratteri; ma io vengo accertato da periti bresciani che, presentemente almeno, il quadretto ha mezzo braccio in

altezza, e due braccia in larghezza. La misura del quadrato si piglia alla metà del canale.

In questi metodi a sezioni rettangole, non altrimenti che nei precedenti, si dilata o si restringe la larghezza delle bocche secondo la quantità d'acqua che si richiede.

100. In altri paesi d'Italia o non ci ha, propriamente parlando, alcuna regola per dispensa d'acque, o la misura di questa si colloca nella sola sezione della luce o del canale che la diffonde, o si cerca d'imitare alcuna delle descritte pratiche, le quali contengono i metodi assolutamente più studiati e meditati per vendere e comperare l'acqua a quella misura che si può più giusta; il che dipende dal grande valore ch'essa ha nei paesi nei quali sono in uso. Imperocchè quell'acqua che in una gran parte dell'Italia è abbandonata all'arbitrio di chi se la piglia, o poco si stima, e talvolta presso alcuni è oggetto di rifiuto, nelle campagne di Novara, di Milano, di Pavia, di Lodi e di Cremona, per l'uso vantaggiosissimo che se ne fa a beneficio dell'agricoltura, è salita a sì alto prezzo, che la proprietà di una bocca di mezzo metro quadro di ampiezza, la quale versi acqua in ragione di un metro cubo per ogni minuto secondo (equivale a 28 once d'acqua di Milano a libera caduta), si valuta circa un mezzo milione di lire italiane o franchi, e più ancora secondo le circostanze particolari de' luoghi.

Non si è qui fatta menzione di quel distribuiamento col quale suol diramarsi per le città e per le case mediante l'uso di canne e cannoncelli, essendo un affare di pochissima considerazione, che non può essere posto a paragone di quella copia d'acqua che si dispensa colle descritte pratiche, nè potendosi con tale dispensamento avere alcuna norma di misura dell'acqua che si diffonde, a cagione della grande e varia perdita di moto che il fluido soffre nella stretta e diversa lunghezza dell'angusto passaggio.

CAPITOLO V.

*De' principali difetti delle descritte pratiche,
e nominatamente della milanese.*

101. Date a conoscere le principali usanze delle dispense d'acque, che sono specialmente in vigore ne' paesi ove ogni copia d'acqua è in grande estimazione per gli adacquamenti, niuno s'attenda che io discender voglia a mostrare a parte a parte tutti i difetti di ciascheduna, poichè gitterei in vano le parole, e farei inutilmente perdere il tempo a chi le ode; io toccherò appena i maggiori inconvenienti comuni a tutte, o particolari di taluno dei metodi più accreditati, a fine di dare in questo luogo qualche saggio della grande loro imperfezione; nel resto

ciascuno confrontando il metodo che noi daremo colla usanza del suo paese, vedrà palesemente per sè stesso tutti i vizj di questa, senza che faccia mestieri ch'altri glieli additi.

Il primo difetto comune indistintamente a tutte le pratiche egli è quello di mancare del fondamento d'ogni misura, ch'è la vera unità esprimente una quantità determinata della materia che s'intende di misurare, ed a cui la misura si riferisca non altrimenti che ogni numero alla unità numerica. L'unità di misura dell'acqua corrente, come già avvertimmo (art. 85), altro non può essere che un solido cubo di acqua, il quale abbia per lato una lunghezza presa per unità lineare, e venga somministrato dalla corrente in un definito tempo considerato parimente per unità di tempo. Allora si avrà la vera ed assoluta misura della quantità d'acqua di ciascheduna corrente, quando si conoscerà ch'essa contiene un tal numero di unità o una tale frazione della medesima. Secondo gli usi impropri delle misure di acqua d'ogni paese tanto in Italia che fuori, si sa soltanto che la tale o tal altra corrente passa per una bocca di un braccio, di un piede quadrato, o di tante once o pollici quadrati di apertura, e se vuolsi ancora con tale o tal altro battente; ma nè il braccio o piede quadrato, nè il numero delle once quadre o de' pollici, nè il battente ci rappresenta la quantità effettiva di

acqua che viene da queste tali luci in un certo tempo somministrata. Ora questa cognizione dell' assoluta misura dell' acqua riportata ad una determinata e nota quantità è del tutto indispensabile, non solamente a fine di poter fra loro paragonare le quantità di acqua solite dispensarsi in paesi diversi a lume de' prezzi, de' contratti e della generale idraulica economia, ma per saperne regolare l'impiego tanto pel movimento delle macchine, quanto per gli adacquamenti, per la navigazione ed anche pel consumo nei domestici usi di una popolazione cui sia per avventura l'acqua destinata. Quando non si conosce la vera quantità dell' acqua di cui si ha a disporre, fa mestieri in tutti gl' impieghi, cui deve servire, gettarne superfluamente una quantità per timore ch' essa al bisogno non manchi; così una quantità preziosa dell' acqua si perde inutilmente pel solo difetto della misura.

102. Un metodo convenevole di misura vuole che la quantità dell' acqua apparisca dalla grandezza della cateratta o luce per la quale passa, vale a dire che la grandezza della luce sia all' unità di superficie come la copia dell' acqua che trasfonde sta all' unità di solido; ma questa corrispondenza fra la grandezza della cateratta e la quantità dell' acqua esige che sia in una determinata maniera aggiustata la velocità dell' acqua, o il battente da cui dipende, alla misura lineare che serve per l' unità di

superficie ; poichè senza questo accomodamento ad ogni grandezza di luce può corrispondere e molta e poc' acqua sgorgante. Ma ne' paesi ne' quali si prescinde dal battente , la velocità dell' acqua è quale s' imbatte , e non ha alcuna relazione colla grandezza della cateratta ; e dove si usa il battente , questo è fissato ad arbitrio senza alcuna corrispondenza colla rispettiva unità lineare e, di superficie di ciascun paese. Egli è questo un secondo difetto comune a tutte le misure fino ad ora usate per dispensa di acque.

103. Ma quand' anche la velocità o il battente fosse adattato alla misura che serve di unità per la grandezza della luce , nessuna luce, secondo i metodi generalmente praticati, potrebbe rappresentare la quantità dell' acqua che passa ; poichè in generale al passaggio dell' acqua per la cateratta le vene capillari inflettono il loro corso , dalla qual piega de' fluidi fili nasce la contrazione della vena intera: allora la sezione della cateratta taglia in isbiescio le vene capillari , e la grandezza di quella eccede non poco la somma delle sezioni perpendicolari di queste , vale a dire la cateratta non rappresenta più la vera sezione della corrente dell' acqua , ch'è quella che può abilitarla ad esprimere la quantità dell' acqua trasfusa. Questo forma il terzo vizio comune a tutte le cateratte che servono generalmente alla misura delle acque correnti.

104. Noi per altro ci siamo studiati di mostrare (art. 97) che, malgrado lo sconcerto di direzione che l'acqua soffre per la contrazione della vena, si potrebbe ottenere l'intento di esprimere la quantità dell'acqua colla sezione della cateratta, purchè la vena contratta conservasse in tutte le bocche una ragione costante alla vena lata, cioè alla sezione della cateratta, e ci siamo ingegnati di chiamare il calcolo in sussidio di questo argomento (art. 95); ma abbiamo altresì osservato che l'assunto di quella costante ragione è in parte appoggiato a gratuite supposizioni, ed è destituito di sufficienti prove sperimentali; onde rimane dubbioso se in ogni circostanza al crescere o calare della cateratta, ancorchè rettangola, cresca sempre o cali nella medesima ragione la copia dell'acqua che si versa. Nulladimeno supponghiamo per largheggiare essere ciò vero, ed essere certo in tutta la sua generalità, talmente che regolando a norma del citato articolo 97 per mezzo del battente la velocità in modo che l'ingrandimento di questa nella mentovata ragione costante supplisca allo impicciolimento della sezione contratta, si possa rappresentare colla grandezza della cateratta la quantità dell'acqua uscente. Convien qui riflettere che la determinazione della velocità dell'acqua che sgorga da ciascun punto di una cateratta per mezzo della sua corrispondente altezza viva, che diciamo battente, dipende secondo le cose dimostrate dall'essere

libera la luce della cateratta, onde l'acqua che sbocca si spiani tutta di sotto il livello infimo della luce, poichè altrimenti l'acqua sgorgata alzandosi sopra il livello della soglia di detta luce, esercita una pressione contro quella che sta per uscirne, ed infievolisce la sua velocità, di modo che questa più non corrisponde all'altezza viva, ovvero al battente: ora in tutte le pratiche delle dispense d'acque il recipiente nel quale si versa il fluido che sbocca dalla cateratta, manca della dovuta condizione perchè lo sgorgo formi libera cascata, e l'acqua che esce or più or meno, secondo le diverse circostanze delle bocche, viene ritardata da quella che già uscita la precede. È questo un nuovo vizio di tutte le comunemente usate dispense d'acque che le rende inesatte ed infedeli, rendendo erronei insieme i calcoli di quantità d'acqua che sui premessi principj si sogliono istituire colle tavole paraboliche e coll'aggiustamento corrispondente alla costante ragione, qual si supponesse, della vena contratta. Dicesi che nel Veronese lo sgorgamento dell'acqua facciasi a libera cateratta; ma per verità o non è tale o non lo è sempre; che anzi più volte vi ha sì grande ringorgamento, il quale frena la velocità dell'acqua uscente dalla cateratta medesima, che si cerca di supplire al grave difetto coll'ingrandire più del dovere l'ampiezza della luce medesima, sconcertando in tal modo il sistema della dispensa.

105. A questi inconvenienti soggiacciono tutt' i metodi fino ad ora usati e che io conosco, onde non ne va esente eziandio il Milanese, che sembra fra tutti il più rinomato; ma questo ha pure altri difetti che non sono comuni a tutti. La quantità dell' acqua che si versa da una bocca dipende dall' altezza viva del fluido sopra ciascun punto della luce, poichè da quest' altezza deriva la sua velocità (art. 69), e da questa la maggiore o minor copia dell' acqua che esce; in più brevi termini la quantità dell' acqua dipende dal battente. L' altezza del battente, secondo gli articoli 69 e 70, vuol essere computata dalla superficie dell' acqua che sia senza pressione e senza moto; ma nell' uso milanese, se la misura del battente si desume dall' altezza che ha l' acqua entro il bottino e rasente l' imposta della cateratta del canal maestro, essendo quivi la superficie del fluido lasciata a tal uopo libera, essa è bensì esente da ogni pressione, ma per la vicinanza ed impeto dello sgorgo l' acqua non vi è mai tranquilla, com' esser dovrebbe per somministrare il legittimo battente, ed ha anzi spesse volte un movimento assai vivo di vibrazione o di vortice: se poi il battente si piglia in vece dalla superficie dell' acqua contigua al modulo, e che quivi s' affronta al ciel coperto, ancorchè in tal sito la superficie dell' acqua fosse per avventura senza moto, il che generalmente non succederà, nulladimeno, non essendovi la superficie libera, vi può

essere e vi sarà comunemente pressione che alteri il battente; e veramente il cielo morto sembra espressamente fatto, perchè non si possa giammai essere certi del vero battente dell'acqua. Nè nell'una, nè nell'altra maniera adunque si ha la legittima misura del battente, e conseguentemente rimane incerta e fallace la dispensa dell'acqua.

Ma quel che dà ancora maggiore risalto a questa incertezza è la troppa brevità del tragitto che fa l'acqua per passare dalla cateratta del canal maestro al modulo, e insieme la ristrettezza di questo tronco di canal coperto, in una parola l'angustia del bottino, la quale per sovraccarico d'inconvenienti fassi ancora più difettosa quando al bottino si occupa notabil parte di sua capacità col piano acclive, che sale dalla soglia di detta cateratta a quella del modulo. Questa angustia della tromba coperta primieramente non concede alle onde provegnenti dal canal maestro, ed a quelle che l'acqua eccita all'impetuoso suo ingresso nel bottino, spazio sufficiente per sedarsi col vicendevole loro contrasto avanti che giungano al modulo, dove, giunte che siano, sconcertano l'uniformità dell'efflusso; secondariamente fa che la vena sgorgante dalla prima cateratta arrivi con tale vivacità di moto al modulo, che là dove urta contro la di lui fronte e contro il coperchio del bottino, aumenti la pressione e con essa il prescritto battente, e dove s'affaccia alla luce aperta per

uscire, accresca la velocità oltre il dovere, vale a dire oltre il termine che corrisponder dovrebbe all'assegnato battente.

Un altro grave difetto, proprio dell'uso milanese, è il lasciare in arbitrio dell'acquistatore dell'acqua il sostituire il mentovato piano acclive al fondo orizzontale del bottino; imperocchè, oltre l'accennato effetto di rendere in tal guisa più angustata la strettezza del bottino medesimo, questo piano forma al modulo una specie d'imbuto, il quale minora d'assai la contrazione della vena che si opera di giù in su, e che ha tutto il suo pieno effetto, allorquando sotto il modulo si lascia un'altezza, contro la quale venga ad appoggiarsi l'acqua che cerca di uscire: onde chi fu abbastanza accorto o fortunato per valersi di questa incauta condiscendenza della pratica milanese, estraе più acqua in parità di once dal suo modulo che altri, il quale attenendosi alla primaria regola fa costruire la tromba coperta col fondo orizzontale.

106. Ma più non si parli di difetti di questo metodo, nè di que' d'altri paesi. Abbastanza si conosce da questa semplice esposizione, che nessuna delle pratiche usate in Italia (ed a peggiore condizione sarebbero per avventura le straniere) per la dispensa delle acque può dirsi all'uopo convenevole; e nessuna con veruna sorta di precauzioni e di artifizi è suscettiva di essere interamente perfezionata,

quando non sia da capo a piè tutta cangiata nel modo che intraprenderemo di esporre.

CAPITOLO VI.

Della misura e dispensa d'acqua col Regolatore

= a piena doccia. =

107. L'ordigno che servirà a misurare l'acqua che si dispensa, sarà quindi innanzi da noi chiamato Regolatore in ossequio dell'inclito Bresciano, primo fondatore della idraulica scienza, che tal nome impose ad una macchina per simigliante uso immaginata. Esso, come ognuno può facilmente comprendere, dovrà generalmente regolare la giusta dispensa dell'acqua, facendo questa passare per una sezione di determinata grandezza e con una data velocità, perchè ne risulti la debita quantità del suo efflusso.

Secondo le cose dimostrate, il battente che si può dare all'acqua la quale si presenti ad un'apertura per sortire, somministra l'agevol modo per costringerla a passare con quel grado di velocità che a noi piaccia di assegnarle per la più comoda sua misura. Supponghiamo adunque che l'acqua, che dovrà presentarsi al Regolatore, abbia a formare un determinato battente elevandosi a certa altezza sopra il labbro supremo della sua bocca, avvertendo che il battente si desume dalla superficie libera

dell'acqua, ove questa per effetto dell'opposto ostacolo abbia perduto ogni moto. L'acqua corrente nel canal maestro non è mai senza moto, sia alla superficie, sia in qualunque sito sotto essa; si può nulladimanco render tale, facendola con taglio della sponda penetrare in un cavo entro terra; ma l'acqua d'ogni fiume e d'ogni canale soggetto alle vicende delle stagioni essendo di livello incostante, e questa incostanza stendendosi eziandio a tutte le acque che in qualsivoglia modo da esso liberamente si diramano per cavi o rigagni entro campagna, piantando un Regolatore entro qualche rigagnolo dal canal maestro derivato, non sarà possibile l'ottenere un costante battente senza porre in pratica qualche artificio: tale sarebbe, per esempio, il dare ad una sponda della gora che guida l'acqua al Regolatore quella sola altezza che corrisponde al battente, affinchè l'eccesso d'acqua versandosi per essa, tornasse nel canal maestro. Facilmente si scorge che, dando a questo versatore la convenevole lunghezza, si può ottenere tutta quella giustezza e costanza di battente che si desidera. Ma questo spediente non è sì agevole in effetto, com'è semplice in apparenza, dovendosi non solo costruire di muro e coprire di lastre di pietra tutta la lunga sponda di tal condotto, la quale serve di sfogatojo all'acqua eccedente, ma essendo inoltre necessario scavare un nuovo rigagnolo che la riceva, e lungi la riconduca nel canal maestro. Quindi

è che volendo dare e mantenere invariabile al Regolatore un determinato battente, riuscirà più semplice l'uso di una cateratta, la di cui luce si possa ampliare o impicciolire secondo le vicende del fiume, affinchè non dia passaggio all'acqua, se non se quanto basti a formare alla fronte del Regolatore il battente che si desidera; onde sarà da restringersi la luce della cateratta quando l'acqua del fiume si alza, ed al contrario sarà quella da dilatarsi quando questa si abbassa, acciocchè l'impicciolita o ingrandita apertura della cateratta sia un'emenda dell'accresciuta o diminuita velocità e copia dello sgorgo. Verrà pertanto il Regolatore preceduto da due opere, l'una delle quali sarà la cateratta con imposta, per cui si piglia l'acqua dal canal maestro, e che noi quindi innanzi chiameremo col nome di cateratta maestra; l'altra sarà la gora o tronco di rigagno posto fra essa ed il Regolatore, cui diciamo bottino. Gioverà parlare alquanto dell'una e dell'altra prima di ragionare della principale costruzione che riguarda il Regolatore.

108. L'ingresso dell'acqua per la cateratta maestra dovendo essere moderato, come vedremo, col mezzo della imposta, l'apertura di quella può farsi grande quanto piaccia, anche all'eccesso, senza pregiudizio del battente che deve darsi al Regolatore, e perciò senza sconcerto della misura dell'acqua. La grandezza adunque della

cateratta maestra, non altrimenti che la sua forma, la sua situazione e l'alto o basso livello della sua soglia, potrebbe interamente abbandonarsi al beneplacito dell'acquistatore dell'acqua, salva solo la condizione che mediante l'aggiustamento dell'imposta si venga a conseguire il prescritto battente d'acqua al sopracciglio del Regolatore. Nulladimanco essendo sempre desiderabile che l'imposta sia di facile ed esatto maneggiamento, e perciò giovando il dare ad essa ed alla cateratta quella minore ampiezza che comporti la quantità dell'acqua da dispensarsi, io aggiungerò qui alcune avvertenze a questo scopo dirette.

La cateratta aperta in isponda del canal maestro con soglia orizzontale e con i due stipiti perpendicolari avrà l'architrave situato a tale altezza che l'acqua del fiume o canale non possa mai superarlo. Gli stipiti siano murati nel solido delle spalle, le quali spargendosi in forma di arco di cerchio, da descriversi con un raggio non minore di mezzo metro, formino imboccatura innanzi alla cateratta, la quale sia al suo ingresso due volte larga quanto questa, ed abbia un fondo orizzontale a guisa di platea a livello della soglia. L'imposta mobile che da una fessura incisa nell'architrave si cala al basso fra gl'incastri scolpiti negli stipiti, è quella che limita la luce della cateratta, per la quale si lascia il passaggio all'acqua. Il più basso livello, al quale discender giammai possano le acque

del fiume o del canal maestro, ovvero quello che secondo i regolamenti o le convenzioni fosse il termine assegnato dal venditore dell'acqua per mantenere all'acquistatore intera la stipulata quantità, oltre il quale calando la corrente maestra mancar dovesse ancora o in parte o in tutto la derivazione del rigagno, si pigli per norma delle opere relative alla dispensa dell'acqua. Supponghiamo inoltre stabilita la misura del battente che deve avere, come tosto vedremo, il Regolatore; e figuriamoci l'imposta abbassata sotto quel livello di norma tanto quant'è questa tal misura. Dallo spigolo inferiore dell'imposta collocata a questo sito s'intenderà cominciare la luce della cateratta maestra. Nella costruzione adunque si dia a questa luce tutta quell'altezza che, secondo le circostanze de' luoghi, comodamente darle si possa maggiore.

Ciò posto, la sezione del Regolatore, che sarà la misuratrice dell'acqua, e che supporremo assegnata ed espressa in parti del metro quadro, o più particolarmente in centesime di questo, si aumenti all'incirca di un sesto, poi si divida per l'altezza soprarrecata, ed il quoziente di questa divisione si piglierà per la larghezza da darsi alla cateratta. Sia, per esempio, la sezione del Regolatore di trentasei centesime parti del metro quadrato, che corrisponde ad una bocca di circa dodici once d'acqua magistrali di Milano; s'aggiunga il sesto, e faranno 42 centesime:

suppongasi che la cateratta si possa senza difficoltà costruire sì alta che la descritta sua luce abbia d'altezza met. 1,40, la sua larghezza sarà $= \frac{0.42}{1.40} = 0^{\text{me}}, 30$; e tale sarà la larghezza dell' imposta, eccetto quel piccol orlo che deve penetrare negl' incastri degli stipiti; nell' uso milanese questa larghezza d' imposta sarebbe sei volte maggiore.

E qui conviene avvertire che alla cateratta maestra si può sempre dare a beneplacito maggiore altezza di quella che abbia l' acqua corrente nel canal maestro, tenendo la sua soglia o platea più bassa del fondo di questo, e lasciando fra l' uno e l' altra un greggio piano inclinato. In tal maniera col dare alla cateratta tutta quell' altezza che più ci tornerà comoda per restringere la sua larghezza, noi potremo far uso d' una ristrettissima imposta che riuscirà sempre di più agevole e di più accurato maneggiamento che un' altra assai più spaziosa, quale fino ad ora si suole usare; e quando la variazione di livello nell' acqua del canal maestro non sia stragrande, sì che obblighi a dare troppo grande altezza anche all' imposta, questa si potrà fare di sottil piastra di ferro o d' altro metallo, perchè sia eterna, e facile e puntualissima a maneggiarsi; non essendo giammai necessario che l' imposta abbia tanto di sopravanzo in altezza da poter servire a chiudere in

qualche caso tutta la luce della cateratta; poichè se talvolta accader dovesse di aver a serrare tutta la cateratta per asciugare la gora o il rigagno, mentre corre acqua pel canale maestro, qualunque tavola in tal caso può agevolmente supplire a quest'uso. Ma checchessia del genere di serrame che si adopera alla cateratta, avendo essa le spalle nel descritto modo arcuate, e la piccola platea orizzontale a livello della soglia, non permetterà alla vena dell'acqua di fare la solita contrazione nè ai fianchi, nè al fondo, ma soltanto alla sommità, la qual contrazione troverà abbondante compenso in quella sesta parte di maggior luce che le fu data in paragone di quella del Regolatore. Onde, secondo la descritta costruzione, potendosi avere anche nel più basso livello di norma delle acque correnti nel canal maestro quel battente sopra il ciglio della cateratta che compete al Regolatore, la luce di quella basterà sempre a somministrare la debita copia di acqua a questo, ed anche più del bisogno a cagione della velocità fluviale che in parte potrà ritenere l'acqua nell'imboccare la cateratta, e più ancora se si vorrà alzare l'imposta di questa fino al livello di norma ed oltre. Ciò sia detto del modo di costruire la cateratta maestra, quando si miri a rendere, quanto si possa più, agevole e puntuale il movimento della sua imposta.

109. Il bottino, ch'è la gorā o tronco di rigagno che riceve l'acqua dalla cateratta e la trasmette al Regolatore, ad altro non deve servire che a dar campo di sedarsi alle onde ed a qualunque movimento tumultuoso ed irregolare dell'acqua che sgorga dal canal maestro, affinchè venendo essa con diretto e regolare corso a dare nel sopraciglio del Regolatore, e quivi dall'intoppo trattenuta, tranquilla e senza moto alla sua libera superficie formi il genuino e giusto battente da cui deve dipendere la misura dell'acqua. A tal uso altro non si richiede che la molta sua capacità; onde si potrà far lungo almeno trenta metri, essendo lecito abbondare nella lunghezza quanto piace, poichè essa non esige che il collocare il Regolatore entro il rigagno, che si suppone già preparato, a tale o tal altra distanza dalla cateratta maestra; e gli verrà assegnata per ampiezza una sezione che equivaglia almanco a dieci sezioni del Regolatore. Se, per esempio, la luce di questo, misuratrice dell'acqua, sarà di metro quadro 0,36, la sezione del bottino non dovrà essere minore di metri quadri 3,60, abbondando in essa il più che si possa in profondità, nè mai facendola minore di quella che si fosse assegnata alla soglia della cateratta maestra ed a quella del Regolatore.

L'asse longitudinale del bottino corrisponderà al mezzo della cateratta e del Regolatore; non giova fare per esso

sponde murate, ma basta al più che siano fra loro parallele, e con quella uniforme scarpa che piacerà di conceder loro. In generale, salva l'ampiezza del bottino, e la scoperta e libera superficie delle sue acque innanzi al Regolatore, tutte le altre avvertenze servono più alla regolarità della forma, che alla giustezza della dispensa dell'acqua; onde senza apprezzabile divario di questa, se le circostanze lo consigliano, si possono leggermente sorpassare.

110. Il Regolatore, ch'è propriamente il misuratore dell'acqua, consiste in un ristretto e breve tronco di canale con fondo orizzontale, di sponde piane verticali, egualmente alte in tutta la lunghezza e parallele fra loro; noi da ora innanzi daremo a questo canale il nome di doccia. La sua sezione rettangola sarà il prodotto dell'altezza nella larghezza; ma l'una e l'altra di queste due dimensioni potrà stabilirsi a beneplacito, purchè il loro risultato sia quello che si domanda: per esempio, vuolsi una doccia che abbia di sezione trentasei centesime parti di metro quadro, ciò sono $0^{\text{mt}},36$; se fosse per tornarci comodo il tenerla larga soltanto $0^{\text{mt}},20$, la faremo alta $1^{\text{mt}},80$; se in vece ci mette conto il darle una larghezza $= 0^{\text{mt}},30$, sarà l'altezza $= 1^{\text{mt}},20$; e se ci piacerà recare quella a $0^{\text{mt}},40$, prenderemo questa $= 0^{\text{mt}},90$; e così dicasi di altre. Stabilita in tal modo l'altezza della doccia, come più ci aggrada di usarla, faremo la sua lunghezza

tripla dell'altezza, o poco più o poco meno, giacchè qualche divario in questa misura non altera l'uffizio al quale è destinata. Ma tanto il fondo, quanto le sponde del Regolatore saranno inoltre prolungate nella parte anteriore per formare alla doccia una specie d'imbuto. La linea pertanto dell'una e dell'altra sponda dovrà verso il bottino degenerare in un arco di cerchio, che si descriverà sopra un diametro perpendicolare al piano della rispettiva sponda, ed eguale a cinque larghezze della doccia; i due archi di egual misura saranno troncati là dove lasceranno fra loro un'apertura doppia della larghezza della doccia medesima, riuscendo perciò la lunghezza dell'imbuto eguale ad una e mezza detta larghezza. Il fondo della doccia sarà per questa lunghezza continuato, anzi si stenderà oltre tanto quanto sarebbe un *decimetro* o due, formando un piccol batolo innanzi l'imbuto.

III. L'imboccatura di questo sarà incisa in un piano verticale, al quale riesca perpendicolare l'asse del bottino, e sia in tal modo direttamente opposto al movimento dell'acqua; esso formerà il prospetto del Regolatore, all'approcciamento del quale le sponde del bottino, se per avventura fossero troppo fra loro distanti, potranno piegarsi per avvicinarsi l'una all'altra, purchè vengano ad incontrare il piano del prospetto in distanza di qualche *decimetro* dall'imboccatura dell'imbuto. A questo si sovrappone un

coperchio ben saldato sopra le curvilinee sue sponde. Le sponde della doccia e dell'imbuto, il loro fondo ed il coperchio dell'ultimo dovranno presentare al contatto dell'acqua una superficie liscia, vale a dire senza notabili scabrosità.

112. Noi prescriveremo nel seguente capitolo la misura del battente; qui frattanto si suppone determinata. Ciò posto, in fine della doccia si dovrà alzare sul suo fondo una traversa tale che, stando l'acqua a giusto battente innanzi la fronte del Regolatore, si sollevi colla sua corrente entro la doccia fino a pareggiare l'altezza delle sponde. Imperocchè è da avvertirsi in questo luogo che senza l'intervento di questo freno, posto allo sbocco dell'acqua, essa velocitandosi entro la doccia, si disporrebbe colla suprema superficie in un piano inclinato, il quale per conseguente lascerebbe un voto nella doccia medesima; la traversa adunque fa empir questo vano, obbligando l'acqua a correre colla superficie sollevata fino al livello delle sponde.

113. Rimane così compiuto il Regolatore, il quale perciò comprenderà quattro parti, che sono il prospetto, l'imbuto, la doccia e finalmente la traversa. Fra queste la vera misuratrice dell'acqua sarà la doccia, che verrà empiuta dalla corrente pel descritto effetto della traversa; quindi si fatta maniera di Regolatore e si fatto modo di

misurare e dispensare l'acqua viene da noi detto = a piena doccia. = Fabbricato dunque a sito il Regolatore, ed attendendo che l'acqua del canal maestro si trovi a quel livello che, secondo i regolamenti o il contratto, dovrà prendersi per norma della convenuta dispensa d'acqua, l'architetto dell'opera incaricato, coll' intervento delle parti, determina alla prova del fatto, quanto voglia essere abbassata l'imposta della cateratta maestra sotto il pelo della corrente, e quanto debba tenersi alta sopra il fondo della doccia la prescritta traversa, perchè si ottengano insieme le due condizioni dello stabilito battente e della pienezza della doccia; la quale operazione è speditissima e di nessun imbarazzo, potendosi in questo sperimento usare una qualunque traversa posticcia per determinare la dovuta altezza da assegnarsi a quella che in forma stabile si fa poscia costruire. Può anche l'architetto, premesso il conveniente sperimento, far saldare a giusto sito l'imposta e stabilmente adattare la dovuta traversa allo sbocco della doccia, per verificare poscia, coll'accesso in luogo delle Parti e colle solite formalità, essere il tutto puntualmente eseguito secondo le regole ed a norma del contratto.

114. La macchina del Regolatore, secondo la premessa descrizione, riuscirà sempre di poca estensione, e potrà farsi, secondo le circostanze, di legno, di muro, di pietra

o di marmo, e similmente ancora la sua traversa; questa, per altro, meriterebbe essere o di duro marmo o di ferro, a fine di poterla terminare alla sommità in sottil costa per lasciare più libera all'acqua la caduta: la piccolezza di questa traversa, che rare volte oltrepasserà l'altezza di uno o due *decimetri*, permette di eseguirla in quel miglior modo che ci aggrada: nulladimeno se piacesse ancora di costruire in vece all'estremità della doccia un massiccio zoccolo di qualsivoglia grossezza in sommità, ciò è indifferente alla giustezza della sua funzione; solo converrà in tal caso avere presenti due piccole avvertenze; l'una è di aggiugnere alla prescritta lunghezza della doccia quel tanto di più che dovrà occuparsi dalla grossezza della traversa, affinchè quella non venga talvolta troppo per questa a restringersi; l'altra sarà la cautela colla quale, nel far prova per avventura della traversa posticcia per determinare la sua altezza, si userà presso a poco di quella medesima grossezza in sommità che si farà conto di dare alla traversa stabile; perchè altrimenti potrebbe passare qualche piccola differenza fra la prova della traversa posticcia e l'effetto della stabile.

115. Aggiustate così le cose al pelo o livello di norma che hanno le acque nel canal maestro, sotto il quale succedendo che si abbassino ancora, il venditore dell'acqua non tengasi più obbligato a mantenere intera la competente

quantità al compratore, questi avrà il suo a giusta misura, finattanto che la corrente nel detto canale conserverà il medesimo livello; ma alzandosi essa per le solite vicende che in certa stagione fanno gonfiare le acque de' fiumi, farà parimente crescere il battente alla cateratta maestra, e quindi al Regolatore; e perciò s'aumenterà la copia della dispensa, quando si lascino le cose nello stato in cui furono da principio collocate.

Se l'acqua, che nelle stagioni d'abbondanza cresce nel canal maestro oltre un determinato livello, riesce inutile e superflua al suo proprietario, ovvero questi non si cura di trarne profitto, nulla a lui importa che una parte si scarichi per le bocche di derivazione, ed aumenti la convenevole copia delle loro dispense, venendo così i rigagni subalterni a partecipare dell'affluenza del canal maestro, com'è ben natural cosa: questo è ciò che si pratica nel Milanese, dove si aggiusta a sito l'imposta della cateratta, quando le acque del canal maestro si trovano ad uno stabilito livello di norma; e quivi si salda, nè più si smuove per qualunque aumento che succeda nel fiume (Vedi il *Ragguaglio matematico*, facc. 43). Altrimenti se colui che ha la proprietà del canale può trar profitto anche da quella copia d'acqua che, secondo le vicende delle stagioni, vi corre oltre l'ordinario, ovvero oltre quella che corrisponde al convenuto livello, e non vuole

perciò permettere che si disperda negli altrui rigagni, egli farà conto (art. 107) che le cateratte di questi abbiano a restringersi al crescere del fiume , e nuovamente a dilatarsi al suo sgonfiare , il che si ottiene con movimento d'imposte. Si potrebbe per tal effetto immaginare un' imposta che , renduta mobile per mezzo di macchina galleggiante , alterni i suoi movimenti con quelli del pelo fluviale , abbassandosi quando questo si alza , ed alzandosi quando esso di nuovo si abbassa , in guisa che , data alla cateratta l' opportuna forma , la sua luce col meccanico ordigno ora ristretta ed ora ampliata non avesse , in qualunque gonfiamento e successivo sbassamento del fiume , a dar passaggio che a quella copia d' acqua che bastasse a mantenere costantemente il medesimo battente innanzi al Regolatore. Ma questa macchina , che non potrebbe eseguirsi che di legno , sarebbe sovente sgangherata , e la dispensa dell' acqua verrebbe , tratto per tratto , sospesa ; oltre di che simile ordigno facilmente si potrebbe per malizia dell' uomo sconcertare. Ai medesimi , ed anche a maggiori inconvenienti andrebbe soggetta una macchina che rendesse galleggiante il piano in cui è scolpita la cateratta , affinchè questa , secondando col suo moto le variazioni del fiume , si mantenesse invariabile il suo battente. L' uso adunque di simili ripieghi non potrebbe essere che un infelice arzigogolo di qualche malconsigliato

ghiribizzatore. Il proprietario adunque dell'acqua non ha altro spediente che il far muovere, secondo il bisogno, l'imposta della cateratta maestra per mano dell'uomo, affinchè quella venga alzata al crescere del fiume, e poscia di nuovo abbassata al suo calare, in guisa da conservare sempre invariabile l'altezza dell'acqua nel bottino ed inalterata la dispensa del fluido che si fa col Regolatore. Questo maneggiamento dell'imposta, a seconda delle vicende del fiume, viene supposto da tutti quelli che di simil modo di dispensa d'acqua hanno ragionato; ed a renderne appunto più agevole ed accurata la pratica, ove convenga di farne uso, sono dirette le avvertenze da noi date intorno alla costruzione della cateratta maestra e della sua imposta.

116. Nel caso in cui si prescinda dal regolare per mano dell'uomo l'imposta nelle piene del canal maestro, gioverà a piccola distanza dall'interno orlo delle sponde della doccia formare qualche rilevato che impedisca il trabocco e dispergimento dell'acque sovrabbondanti alla consueta misura.

Di ciò che convenisse di fare nella supposizione che le acque del canal maestro potessero abbassarsi anche sotto il livello di norma, e che allora dovesse, secondo i patti, diminuirsi in certa proporzione la dispensa dell'acqua, più acconciamente si parlerà in altro luogo, dopo che

avremo stabilita la misura del battente che dar si debba al Regolatore, come passiamo ora a dichiarare.

CAPITOLO VII

Del battente che convien dare al Regolatore per la dispensa dell'acqua = a piena doccia. =

117. Rammenteremo in questo luogo che il battente che si tratta di assegnare al Regolatore, sarà la differenza di livello fra la superficie dell'acqua renduta immobile avanti la fronte del Regolatore e la superficie dell'acqua corrente nella doccia. Questa differenza da noi espressa all'art. 90 colla lettera *a* dovrà per la maggiore semplicità della misura dell'acqua esser tale che le corrisponda l'unità di velocità, cioè dovrà essere (art. 67)

$$a = \frac{1}{2g} = \frac{1''.1''}{2 \times 9,8054 \text{ } \mathfrak{A}^2},$$

1'' denotando un sessantesimo minuto secondo, e $\mathfrak{A}$ quel tempo che piace di assumere per unità di misura: per lo che si vede che il prescrivere il convenevole battente alla macchina della dispensa d'acqua dipende dallo stabilire qual tempo prendere si voglia per unità di misura del suo genere. Pigliando il secondo minuto sessantesimo per tale unità, cioè facendo $\mathfrak{A} = 1''$, avremmo $a = 0^{\text{mm}},050992$. Qui però convien fare due osservazioni: 1.^o che giova per la maggiore puntualità della dispensa il non fare il battente

soverchiamente piccolo, perchè quanto esso è più debole, tanto nelle sue variazioni cagionate dal diverso livello delle acque del fiume, o da qualche difetto nel maneggiamento dell' imposta, o da checchessia altro, produce più di sconcerto nella giusta misura dell' acqua; 2.º che l' unità naturale della misura del tempo, e quella, la quale ha eziandio una stretta connessione coll'uso delle acque, egli è il giorno; ma non potendosi nell' affare presente prendere la sua durata per unità di tempo, perocchè darebbe immenso battente, egli è forza pigliare almeno una sua frazione che abbia con essa un semplicissimo rapporto, e tale che si possa rappresentare colla sola cifra dell' unità agli zeri aggiunta. A questa condizione non soddisfa il sessantesimo minuto secondo, perchè esso torna $= \frac{\text{giorno}}{86400}$.

Se in vece del sessantesimo piglieremo il centesimo minuto secondo usato nella nuova divisione decimale del giorno, ch' è appunto la centomillesima parte della media durata di questo, vale a dire $= 0^{\text{met}},00001$, esso, come si vede, avrà una semplicissima ragione all' unità naturale del tempo, e negli usi delle acque potrà facilmente essere ad essa equiparata. Stando poi il centesimo al sessantesimo minuto secondo come $86400 : 100000$, vale a dire essendo $\frac{9}{10} (= n) = \frac{86400}{100000}$, il che rende la $g = 7,31969$, si troverà il battente

$$a = \frac{1}{2g} = 0^{\text{met}},068308.$$

Esso è alquanto maggiore del precedente, ed è perciò secondo la prima osservazione da preferirsi anche per questo motivo: sarebbe stato desiderabile che potesse riuscire eziandio un pochetto più grande per la ragione sopra addotta; ma ciò non è possibile, poichè volendo pigliare in cambio del centesimo minuto secondo un altro tempo per unità di misura, converrebbe prenderlo almeno dieci volte maggiore del detto centesimo secondo, affinchè conservasse l'indispensabile semplicità di rapporto coll'immutabile unità naturale, ch'è il giorno; ma prendendo un tempo dieci volte maggiore, si otterrebbe un battente cento volte maggiore del ritrovato, cioè $= 6^{\text{m}},8308$, il che è affatto impraticabile, come per contraria e più forte ragione sarebbe impraticabile il battente $= 0^{\text{m}},000683$, che corrisponderebbe all'unità di tempo, quando questa si volesse prendere dieci volte minore del centesimo minuto secondo. Questo battente adunque da noi descritto $= 0^{\text{m}},068308$ vuol essere assolutamente preso per fondamento d'ogni dispensa d'acqua $=$ a piena doccia $=$, nè da esso si può declinare.

118. Per quei casi nei quali è giovevole l'uso d'un battente maggiore, noi troveremo un ben semplice rimedio senza abbandonare questa norma fondamentale. Imperocchè dove le circostanze de' luoghi, ed il livello de' terreni e delle acque lo comporteranno, basterà usare il Regolatore

a doppia, a tripla ed anche a quadrupla o maggior misura, vale a dire disporlo in modo che la sezione della sua doccia vaglia pel doppio, pel triplo, pel quadruplo o più di grandezza, col dargli un battente valevole a generare due, tre, quattro e più volte tanta velocità, quante richiede la macchina a semplice misura. Il Regolatore adunque — a doppia misura — avrà il battente quattro volte maggiore del battente fondamentale, cioè = $0^{\text{m}},273232$; il Regolatore — a tripla misura — vorrà un battente nove volte maggiore del predetto, cioè = $0^{\text{m}},614772$; e quello — di quadrupla misura — lo esigerà sedici volte maggiore, che risulterà = $1^{\text{m}},092928$; e con quest'ordine si potrebbe fare il Regolatore a vie maggior misura, coll'ingrandire più e più il battente a beneplacito. La qual cosa, oltre il rendere la dispensa dell'acqua meno soggetta alle vicende del canal maestro, ed a que' difetti che possono derivare da poco esatto maneggiamento dell'imposta, serve ancora ad impicciolire la macchina del Regolatore, ed a renderne più comoda ed agevole la sua costruttura.

119. Quando il livello di norma del canal maestro non fosse da regolamenti o da convenzioni stabilito ad un infimo pelo, sotto al quale non possano mai le acque malgrado la loro magrezza abbassarsi, e dovesse talvolta venir meno il battente al Regolatore assegnato, e con esso ancora la destinata copia dell'acqua; se nell'alienazione di

questa non si fosse stipulato quanto diminuire si dovesse il battente a misura che l'acqua del fiume si abbassa sotto il livello di norma, ma avesse in tal caso a lasciarsi l'imposta della cateratta maestra al suo sito, perchè il battente del Regolatore facesse spontaneamente quel calo che fosse consono allo sbassamento del canal maestro, e si considerasse che il meno di acqua in tale stato di scarsezza del fiume o canal maestro vada in compenso di quella che, oltre la conveniente misura, riceve l'acquistatore, quando per l'abbondanza del medesimo canale cresce il battente: siccome in tal caso mette sempre conto al compratore dell'acqua l'usare il Regolatore a doppia, a tripla od a quella maggiore misura che le circostanze de' luoghi permettono, affinchè il forte battente gli renda bensì minori gli aumenti d'acqua nelle piene, ma gli faccia altresì meno discapitare nella magrezza del fiume, nel qual tempo ogni porzione d'acqua è assai più preziosa che nella stagione dell'affluenza; il venditore dal suo canto potrà avere ciò in considerazione nel contratto per concedere o negare il Regolatore a doppia o tripla misura, ecc., o vero per fissare in ogni supposizione il livello di norma tanto alto, che il più col meno dell'acqua che ne' varj stati di copia e di scarsezza del fiume si deriva, venga a suo giudizio a compensarsi non a stima di materiale quantità, ma a ragione di apprezzabile valore.

120. Diversamente se, prescritto da regolamenti o da contratti il livello di norma, fino al quale il venditore guarentisce la stipulata quantità d'acqua al compratore, si convenisse nel resto, che calando il canal maestro sotto il disegnato pelo, si dovesse coll'adattamento dell'imposta procurare una diminuzione tale di battente al Regolatore che facesse pressappoco calare l'acqua della doccia in proporzione dello scemamento che soffre la copia del canal maestro nell'abbassarsi sotto il pelo di norma, il che sarebbe più consentaneo ai generali principj di giustizia, allora si renderà necessario il dividere il battente di su in giù in dieci parti nel seguente modo: l'altezza sua si riporta su qualche regolo, e si divide in cento particelle eguali; poi notando zero alla sua sommità, e discendendo sotto di essa pel tratto di 19 particelle, quivi si segna n.º 1; calando a basso per altre 17 particelle, si noterà il segno 2, e sotto altre 15 si porrà il 3, poi il 4 sotto altre 13; e così seguitando a discendere secondo i numeri dispari 11, 9, 7, ecc. di tali particelle, si andrà segnando a sito i numeri 5, 6, 7, ecc. Questa scala di segnali 0, 1, 2, 3, 4, ecc. sarà ricopiata e descritta sul battente del Regolatore, discendendo per ordine d'alto a basso. Quando l'acqua del canal maestro abbassandosi sotto il livello fondamentale e di norma si stimerà indigrosso calata nella sua copia a detto livello competente di una

decima parte, si farà col maneggiamento dell' imposta discendere il battente del Regolatore al n.° 1 sotto lo zero; quando il calo del fiume sarà all' incirca reputato di due decimi, il battente si dovrà ridurre al seguale n.° 2; poi al n.° 3, al n.° 4, ecc. quando si considererà calata di tre, di quattro decimi, ecc. l' acqua del caual maestro in paragone di quella che ci corre quando il pelo si trova allo stabilito livello fondamentale. Al che si renderà necessario il porre nelle sponde del canal maestro i segnali corrispondenti alle considerate diminuzioni del corpo di acqua corrente: e qualora in questa determinazione si voglia seguire una regola meno soggetta a falli, là almeno dove si tratti di acqua molto ne' suoi usi preziosa, si formerà al principio del canal maestro una specie di Regolatore pel tratto di otto o dieci metri con fondo orizzontale e sponde verticali e parallele, prolungate alquanto superiormente in forma arcuata per impedire la contrazione della vena; e verso l' estremità inferiore di questo tronco regolare di canale, a lato di una sponda si noterà il segno al quale corrisponde il livello di norma ovvero pelo regolatore dell' acqua, ponendovi lo zero; indi presa l' altezza di questo pelo sopra il fondo del canale, si praticherà ad essa la medesima operazione prescritta qui sopra pel battente del Regolatore, vale a dire, divisa quella in cento parti eguali, si segnerà n.° 1, discendendo per 19

tali particelle sotto lo zero; poi n.° 2, calando altre 17; e così di seguito compiendo la scala, come venne suggerita per la divisione del battente. Questa meriterà il nome di *idrometro* del canal maestro, assai più che gli altri a simil uso destinati, poichè esso additerà la copia dell'acqua che corre pel canale, a misura che si va abbassando sotto il pelo di norma, con quella maggiore approssimazione del vero che la natura della cosa permette. Quando pertanto il sopraccìò incaricato di regolare la dispensa dell'acqua vede calare il pelo del canal maestro al n.° 1 sotto lo zero, il che indica che gli manca incirca una decima parte della sua acqua, abbassando l'imposta della cateratta maestra, fa parimente discendere il battente del Regolatore al n.° 1 sotto il suo zero; quando la corrente del canal maestro segna il n.° 2 al suo *idrometro*, si fa similmente calare al n.° 2 il battente del Regolatore, e così del resto. Questa è l'unica maniera che si può porre in pratica, quando si cerchi di diminnire l'acqua che si dispensa in quella misura pressappoco in cui va scremando la copia del fluido nel canal maestro all'abbassarsi che fa sotto il convenuto pelo regolatore della dispensa.

Solo convien qui avvertire che almeno, mentre s'aggiusta a sito l'imposta, vuolsi con qualche aggiunta di traversa o di ostacolo a questa accoppiato far sì che l'acqua corrente empia la capacità della doccia; dico almeno mentre

si aggiusta a sito l'imposta, poichè la maggiore accuratezza richiederebbe che si lasciasse alla traversa la nuova giunta d'altezza, affinchè l'acqua seguitasse a correre a piena doccia, ma in questa sorta di scompartimento la pratica può accontentarsi di una certa approssimazione alla vera misura, purchè questa sia la medesima per tutte le bocche che tirano acqua dal medesimo canale.

Questa specie di Regolatore da noi qui suggerita pel canale maestro meriterebbe di essere costruita su tutt'i grandi canali artificiali; poichè, qualunque sia l'uso della loro acqua, giova sempre il poter conoscere l'aumento o decremento della sua quantità; ed è sì semplice la sua costruzione e sì poca la spesa, che anche a solo lume e soddisfazione dell' arte idraulica si dovrebbe almeno dai Governi far eseguire sopra le acque pubbliche che corrono per simili alvei. Tale provvidenza, lodevole per qualunque acqua, si rende per alcuni canali necessaria, quali per esempio sarebbero ne' nostri contorni la Muzza ed il Canal civico di Cremona, i di cui rigagni debbono essere in certe stagioni regolati secondo lo stato di scarsezza del canal maestro; ma sì belle opere non si possono sperare che al lungo volger degli anni.

121. La fabbrica di cui parliamo, non dovendo cagionare nè alzata, nè caduta d'acqua, non è d'alcun impedimento alla navigazione. Per dire poi una parola anche di

questa, ritornando sul proposito di scemare in certi casi il battente e la copia d'acqua ai rigagni, quando cala la corrente nel canal maestro, se questo sarà navigabile e secondo i regolamenti, avrà a mantenersi perenne la sua navigazione in qualunque stato di magrezza d'acque; a scapito ancora de' derivati rigagnoli si dovrà nell'ultimo tronco di quello segnare il minimo pelo dell'acqua alla navigazione necessaria; e quando nelle siccità cominciasse la corrente a calare sotto tal livello, il custode di tutte le superiori bocche de' rigagni, maneggiando le imposte, fa calare a tutt' i loro Regolatori il battente al primo segnale del n.º 1; se ciò non basta all' intento della navigazione, lo fa discendere al n.º 2, al 3, al 4, ecc., secondo che esige la perennità della navigazione fino all' ultimo tronco del canal maestro.

122. Nel terminare questo capitolo osserveremo che noi abbiamo espresso la misura del battente con sei cifre decimali, ma solo per metodo, perchè è dedotta dalla caduta de' gravi, anzi dalla lunghezza del pendolo che batte i centesimi minuti secondi alla latitudine di Milano, la qual lunghezza si determina fino alla precisione di sei cifre decimali; per altro nell' affare delle acque basta al più giugnere alle millesime parti del metro, onde il battente si potrà esprimere = 0,068; e quando piacesse la massima di abbondare alquanto nella pratica, si potrebbe

recare al numero rotondo $\approx 0,070$, nel qual caso il compratore avrebbe per l'accresciuto battente il vantaggio di un settantasettesimo circa di acqua più della rigorosa misura, il quale gli servirebbe di abbondante compenso per quell'inevitabile discapito che soffre per un movimento di palpitazione o di ondeggiamento, che si scopre sempre nell'acqua corrente la più regolare, e che facendole perdere alquanto di velocità, produce qualche lievissimo scapito nella quantità del suo efflusso.

CAPITOLO VIII

Si rende ragione della costruzione del Regolatore $\approx$ a piena doccia $\approx$, e si dà a conoscere la sua perfezione, additandosi ancora i varj usi di simil macchina.

123. Dei suggerimenti dati per la costruzione della cateratta maestra e del bottino che precedono la macchina del Regolatore abbiamo a suo luogo renduta ragione, ove questa per avventura non fosse stata per sè stessa abbastanza palese; rimane adunque a doversi dimostrare la convenienza di quanto è stato prescritto per la fabbrica del Regolatore, ed a dire della sua perfezione e degli usi ai quali simil arnese può servire.

Il prospetto del Regolatore affronta il movimento che ha l'acqua nel bottino, affinchè questa dando nell'opposto

ostacolo perda in superficie ogni moto e formi il giusto battente; e conciossiachè può giovare il segnar questo a fianco dell'imboccatura nel Regolatore aperta, anzichè a piombo sopra di essa, per essere ivi l'acqua meno soggetta a commovimento, le sponde del bottino si tengono alquanto distanti dai labbri di quella. L'imbuto impedendo in parte la contrazione della vena, ed in parte correggendola entro il suo recinto, guida la corrente a secondare col suo moto le sponde della doccia. Le sponde dell'imbuto sono formate in archi di cerchio, perchè questa figura è facilissima a disegnarsi; per altro qualunque linea di dolce ed uniforme curvità può servire all'uopo, anzi tanto meglio quanto avrà men rapida curvezza; e perciò la circolare medesima, parlando a rigore, riuscirà tanto migliore, quanto sarà con maggiore diametro descritta, salva la condizione di prolungare gli archi a segno che formino abbondantemente larga imboccatura all'ingresso dell'acqua, e di descriverli in modo che, dove si uniscono colle sponde della doccia, la linea di queste sia ad essi tangente. Noi pertanto volendo bensì largheggiare in queste misure, ma senza dar troppo nel soverchio, abbiamo assegnato all'imboccatura dell'imbuto la doppia larghezza della doccia, e diamo ad esso $\frac{3}{4}$ di tale imboccatura per sua lunghezza; onde la larghezza della doccia essendo $= 1$, la lunghezza dell'imbuto si piglia $= 1 \frac{1}{2}$, e la sua

larghezza all'ingresso dell' acqua $= 2$; il che si ottiene descriveudo nell' indicato modo l'arco con un diametro eguale a cinque larghezze della doccia. Se taluno non avesse in mira di usare nella dispensa dell'acqua tutto quel grado di esattezza che l'arte può procurare, ma si accontentasse di quella precisione che, senza essere scrupolosissima, non fosse però aliena da una pratica plausibile, potrebbe formare l'imbuto a sponde rettilinee; ma allora si renderebbe necessario l'allungarle tre o quattro volte più della suggerita misura.

124. L'imbuto si cuopre per impedire che l'acqua trabocchi, e per determinarla a prendere in superficie una direzione orizzontale qual è quella del coperchio, correggendosi così l'inclinazione di su in giù, che all'ingresso soffre per effetto di contrazione di vena che su questo verso le viene permessa. Essendo il fondo dell'imbuto piano ed orizzontale, ma più alto del cupo fondo del bottino, succederà contrazione di vena anche in questa parte, pigliando i fluidi fili al loro entrare nell'imbuto un piegamento all'insù; ma ben tosto al restringersi dell'uscita saranno costretti a ripiegare verso il fondo, ed a lambire col loro movimento il piano di questo; nulladimeno si prolunga alquanto il fondo dell'imbuto oltre il piano del Regolatore, non tanto per dare qualche maggior campo al raddrizzamento de' fluidi capelli, quanto perchè quell'onda

o salto dell'acqua che lo precede, segua fuori dell'imbutto, ed entri il fluido in questo, ed indi nella doccia con movimento più tranquillo e regolare, condizione importante per la giustezza della sua misura.

125. La doccia ha fondo orizzontale e sponde piane perpendicolari d'eguale altezza e parallele fra loro per maggior semplicità di sua forma e facilità di misura della sua corrente, come tosto vedremo.

126. La parte in certa guisa principale del Regolatore può dirsi che sia il più piccolo suo pezzo, cioè la traversa. Essa obbliga l'acqua ad alzarsi nella doccia tanto quanto basta per empirla, operando in opposto modo a questo vaso quel che fa la rasiera allo stajo; poichè questa levando il colmo, e quella il voto, rendono ambedue la misura piena e rasa: qui però non si mira soltanto ad ottenere questa pienezza di vaso, ma a far prendere ancora alla corrente in superficie un movimento di direzione orizzontale e parallela al fondo della doccia. E conciossiachè a piccola distanza dalla traversa l'acqua è costretta a sollevarsi alquanto, e formare un piccol dosso per la piega che prendono le fluide vene vicino al contatto dell'ostacolo, affinchè nel rimanente della doccia la superficie dell'acqua rimanga spianata e senza sensibile inclinazione, si dà alla doccia medesima un'abbondante lunghezza, tripla cioè della sua altezza, mentre potrebbe bastare anche una sola

metà, non arrecando apprezzabile spesa, nè disturbo il largheggiare in sì piccola cosa.

La traversa non servendo che d'intoppo all'acqua sgorgante dalla doccia, affinchè questa venga dalla corrente empiuta, egli è chiaro che qualunque altra foggia di ostacolo posto al confine della doccia potrebbe prestare il medesimo servizio.

127. Mercè di questa meccanica noi ottenghiamo nella doccia una corrente compresa fra quattro superficie piane, che sono due sponde perpendicolari e parallele fra loro, e fondo e superficie suprema orizzontali; quindi si avverano in essa le condizioni negli articoli 86, 87, 88 e 89 dichiarate: e poichè nel far uso del battente $\alpha = \frac{1}{2g}$ noi le abbiamo conciliato la velocità eguale all'unità di misura del suo genere (art. 90 e 117), non solamente essa si muoverà nella doccia a guisa di solido parallelepipedo squadrato (art. 91), di cui non vi ha forma più semplice e più acconcia alla facile e puntual misura, ma questa inoltre ci verrà distintamente significata dall'ampiezza medesima o sezione della doccia, di modo che se la sezione della doccia in metri quadri espressa sarà per esempio $= 0^{\text{m}},36$, vale a dire trentasei centesime di metro quadrato, la quantità dell'acqua che si dispensa con questa doccia ogni centesimo minuto secondo (ch'è l'assunta unità di tempo), sarà in metri cubi $= 0^{\text{m}},36$, che voglion

dire 36 migliaia di metri cubi al giorno, ch'è l'unità naturale di tempo a tutti notissima e familiare. Egli non è possibile immaginare altro modo di dispensa e di misura d'acqua più semplice ed insieme più puntuale e più certo di quello che si ottiene col descritto Regolatore = a piena doccia = dall'esatta geometria suggerito.

128. Ma diamo qualche occhiata ancora alle felici circostanze che si combinano in questo uso. Esso lascia in nostro arbitrio il dare alla doccia più o meno d'altezza o di larghezza, secondo che o per la condizione de' siti, o per la maggiore facilità della costruzione ci tornerà più comodo l'abbondare nell'una, anzichè nell'altra di queste due dimensioni, salva sempre la geometrica certezza della giusta misura dell'acqua che ne risulta; il che non è in verun'altra pratica permesso. Esso, più che qualunque altro usato modo, riesce opportuno pe' luoghi di scarsissima declività, a motivo del piccolo battente o caduta d'acqua di cui si accontenta; nè gli arreca pregiudizio o imbarazzo il ringorgo delle acque inferiori, poichè questo coopera anzi a facilitare l'empimento della doccia, facendo in parte la funzione della traversa. Dove poi la declività de' terreni lo acconsente, usando il Regolatore a doppia, a tripla, ecc. misura, eccoci in vece un battente forte quanto ci piaccia per rendere la dispensa dell'acqua poco o nulla soggetta alle vicende del canal maestro, anche nel

caso che non si maneggi all'uopo l'imposta della cateratta maestra, o il suo maneggiamento fosse per avventura meno esatto, e per ridurre la macchina del Regolatore, per sè stessa sempre piccola, ad un grado vie maggiore di piccolezza e di più agevole fabbrica.

La sezione della doccia, ch'è quella che determina la misura della dispensa, si piglia al suo principio, vale a dire al confine dell'imbuto, e qualche piccola disuguaglianza di grandezza, che avesse in più o in meno nel rimanente suo corpo, farebbe soltanto che l'acqua alla superficie prendesse tanto o quanto di declività o di acclività per avvallarsi fra le sponde o per superarle, formando perciò un angolo coll'orizzonte, il quale avrà per tangente una piccola quantità m positiva o negativa; ma questo non altera in modo alcuno apprezzabile la quantità della dispensa (art. 89). Per la medesima ragione, il tenere la traversa alquanto più alta o più bassa del dovere, sì che ne derivi qualche piccol grado d'inclinazione nelle superficie della corrente, non produce sensibile divario nella misura dell'acqua; il che mostra che in questa macchina tutto cospira alla giustezza del suo uso.

Questo genere di misura non solo è soddisfacente pel rigido geometra che apprende la forza di sua dimostrazione, ma esso appaga ancora l'occhio del compratore idiota, perchè questi vedesi dato il suo a piena e rasa

misura, come si compra il grano a raso stajo, e conosce che non vi ha tanta puntualità e sicurezza nel misurare i liquori che si vendono a boccali o a metadelle, quanta nella dispensa della sua acqua si usa. Egli può ancora con facilità, se gli piace, far prova colla sperienza della velocità che un tal battente genera nell'acqua, eseguendo lo sperimento nel suo gabinetto con un piccolo e manesco Regolatore che versi l'acqua in un ampio vaso; imperocchè questo genere di sperienze riesce egualmente esatto coll'uso di una grande, che di una piccolissima macchina. Egli inoltre al Regolatore, che serve per la sua dispensa d'acqua, osservando i galleggianti sommersi a diverse profondità nella corrente della doccia, può assicurarsi col testimonio de' proprj occhj che il corso dell'acqua è il medesimo da cima a fondo, e che perciò il fluido si muove a guisa di un corpo solido e di forma parallelepipedo.

129. E non è qui da passare sotto silenzio che la sezione medesima del Regolatore, la quale esprime da sè stessa la quantità dell'acqua che tramanda, rappresenta ancora al coltivatore l'estensione dell'adacquamento dei campi cui può in un giorno servire. Imperciocchè da diverse osservazioni da me fatte o da altri raccolte risulta, che ne' terreni che offrono all'acqua un'ordinaria penetrabilità mille metri cubi di quella, quando se ne lasci disperdere men che si possa negli scolj, bastano ad

irrigare una superficie di dieci mila metri quadri, che formano appunto una metrica *tornatura*. In fatti uno strato di fluido alto un *decimetro* penetrando tosto un letto di terra alto due *decimetri*, lo inzuppa talmente che lo rende poltiglioso e liquido; onde esso diffonde poscia l'umidità anche a profondità maggiore, il che ne' nostri climi è sufficiente a mantenere per quindici giorni nella state il necessario umore alle novelle biade, rinnovandosi secondo il solito l'adacquamento due volte al mese. E in vero talvolta nel cuore della state piove quanto basta per risparmiare ai campi gli artificiali innaffiamenti, pure o non mai, o radissimamente accade che in un mese estivo tanta acqua venga dal cielo, che pareggi un'altezza di due decimetri; nè il calore estivo giugne a succhiare tanta copia di umore dall'acqua medesima esposta ai raggi del sole. Ora la sezione del Regolatore per ciascheduna centesima di metro quadro rende mille metri cubi di acqua al giorno, conseguentemente quante centesime essa contiene, tante metriche *tornature* al giorno si possono irrigare coll'acqua che somministra; per esempio la sezione del Regolatore sia $= 0^{\text{mm}},36$, e metriche *tornature* 36 si potranno in un giorno colla sua acqua innaffiare; onde la sezione medesima del Regolatore significa al suo possessore l'estensione del praticabile adacquamento. Il coltivatore, attenendosi a questo semplicissimo principio, e facendo ancora, ove

occorra , a' suoi risultamenti quelle modificazioni che fossero alle particolari circostanze degl' irrigui campi consentanee, troverà sempre in esso una norma fondamentale che lo renderà accorto sopra il suo interesse, affinchè non permetta che nell' irrigare i terreni una parte preziosa della sua acqua venga inutilmente dissipata.

In generale poi la più esatta cognizione della quantità de' campi che con una certa copia d'acqua si possono innaffiare secondo la qualità de' climi, de' terreni e del genere di coltura, compresa anche quella de' risi che adimanda una innondazione perenne, non a riprese come le altre, non si potrà conseguire se non dopo che verrà posto in uso il descritto Regolatore a piena doccia, il quale dà sempremai a conoscere con certezza la vera e puntuale misura della copia d'acqua che si tramanda pel rigagno e che da esso si diffonde sopra le irrigue terre; il che non si ottiene con verun' altra pratica di dispensa d'acqua finora usata, come abbiamo a suo luogo dichiarato.

130. Quanto si dice dell' uso dell' acqua per irrigare i campi, vale per qualunque altra sua adoperazione dipendente dalla maggiore o minore sua massa, come per muover macchine in ogni sorta d' idraulici edifizj, di maniera che il Regolatore solo potrà con accertatezza dirci la copia d'acqua che in qualsivoglia circostanza bisogna impiegare pel movimento di qualunque macchina, a fine di farci

risparmiare il superfluo che inutilmente andrebbe perduto, onde esso potrà divenire la norma generale d'una vantaggiosa e saggia economia delle acque.

131. Per parlare d'altri vantaggi del Regolatore, faremo osservare che l'utilità sua non si stenderà solamente a que' rigagni, la cui dispensa d'acqua si faccia d'ora innanzi con tale ordigno, ma potrà altresì facilmente accomunarsi a tutti quelli, la cui derivazione si pratica cogli imperfetti moduli che abbiamo descritti, i quali lasciano generalmente ignorare ai proprietarj la vera quantità dell'acqua che posseggono. Imperocchè ciascun di questi per conoscere con tutta puntualità la vera copia dell'acqua che gli viene dispensata col modulo milanese, cremonese, mantovano o altro, non ha che a fare un momentaneo sperimento, adattando in qualche sito un posticcio Regolatore di legno al suo rigagnolo, ed applicando al confine della doccia l'un sopra l'altro diversi piccoli legnetti finchè quella si empia; poichè allora osservando fin dove si alza e si mantiene costante il battente dell'acqua, da questo e dalla nota sezione della doccia ricava sul momento in metri cubi la giusta quantità dell'acqua che a lui rende la bocca modellata secondo la tale o tal altra pratica del paese; atteso che, data l'altezza del battente in metrica misura, e pigliata la sua radice quadra, che noteremo (B) , segnando S la sezione della doccia, sarà $\frac{(B)S}{0,26135} = 3,8262 (B) S$

la quantità d'acqua espressa in metri cubi che il suo rigagno riceve dal modulo milanese o altro che sia nel tempo di 1" centesimo: il numero rotto 0,26135 è la radice quadra del battente 0,068308 dovuto alla velocità = 1. Per esempio la sezione del posticcio Regolatore collocato sopra il rigagnolo è di dodici centesime, cioè $S = 0,12$; l'acqua alla fronte della macchina si alza a segno di formarvi un battente = 0,36, la cui radice (B) = 0,6; la quantità dell'acqua che corre pel rigagno in 1" sarà di metri cubi $3,8162 \times 0,6 \times 0,12 = 0,2754$ (prese quattro sole cifre decimali), vale a dire il rigagno, e conseguentemente la bocca rispettiva all'uso del paese modellata somministrerà ogni giorno 2754 metri cubi di acqua.

In questa guisa si può con facilità sapere la vera quantità d'acqua che rende ogni modulo secondo le diverse pratiche di dispense d'acque, e conoscere in conseguenza gli svarj ai quali può essere soggetto per la diversa grandezza e forma or più, or meno bislunga che gli viene data, e per tutte le varie circostanze in cui si trova secondo la diversa copia dell'acqua che vuol dispensarsi e giusta la pratica di ciascun paese. Egli è questo il modo di venire in cognizione di tutte le inegualità e di tutti i falli che nelle dispense d'acqua ora in più, ora in meno, ed a danno quando di chi compra e quando di chi vende l'acqua, si commettono cogli usi difettosi che altrove

abbiamo descritti. Un Regolatore di certa grandezza può servire alla misura di poca e di molt'acqua, secondo che le circostanze del rigagno, per cui discorre, permetteranno di dargli più o men forte battente; se questo può ottenersi di circa sei decimetri, che corrisponde a quello della macchina a tripla misura, un Regolatore capace di 36 centesime d'acqua, che equivarranno circa a dodici once d'acqua del modulo milanese a libera cascata, può rendersi portatile ad un uomo. Ne' paesi ove si fa grande e prezioso uso d'acqua pei bisogni civili e campestri, il Perito non dovrebbe trovarsi sfornito di una o due di tali macchine per usarle ovunque si richiegga a lume de' possessori dell'acqua.

132. Questa macchina non solo si rende giovevole ai proprietari delle acque col dar loro a conoscere la vera quantità di queste e col renderli accorti sull'economico e vantaggioso loro uso, ma apre inoltre un vasto campo agl'idraulici sperimentatori per eseguire d'ora innanzi in grande e con molta facilità le sperienze intorno alla velocità e copia d'acqua che si tramanda o per via di cateratte diverse di forma, di grandezza, di battente, o per mezzo di canali di varia altezza d'acqua, e di fondo o di superficie comunque inclinati, ed in ogni altra qualunque circostanza che alterar possa il corso dell'acqua, ed indurre differenza nella quantità del suo efflusso. Imperocchè

se fino ad ora questo genere di sperimenti si rende difficilissimo, perchè obbliga a formare un grande catino che riceva tutta la copia dell'acqua dalla cateratta o dal canale versata, ed a misurarne con esattezza la capacità, ed a dover inoltre ripetere più e più volte la medesima esperienza per emendare quegli errori che nascono dall'essere or più, or men concertato ed esatto il tempo con cui si dà e si toglie l'acqua alle bocche, il che pone in necessità di far ad ogni ripresa votare a braccia d'uomini e colle pale il grande bacino, quando la situazione dei luoghi non offra all'acqua una spontanea uscita dal profondo vaso, accidente assai raro a verificarsi; quindi innanzi, senza aver punto bisogno di scavare ampj bacini e senza tante faccende, basterà in un solo sperimento far che l'acqua sgorgata dalla cateratta o dal canale che si vuol mettere alla prova, passi per un posticcio Regolatore, formando battente alla sua fronte; poichè da questo e dalla data sezione di quello si ritrae nel soprarretrato modo (art. 131) con somma accuratezza la quantità dell'acqua che trapassa: sicchè per ogni variata misura o circostanza di cateratta o di canale non si richiude che un solo sperimento di pochi minuti, a fine di determinare la giusta copia di fluido che si ottiene, e con essa gli accidenti che soffrir deve la sua velocità. Onde coll'uso di tal macchina verremo in cognizione del come e quanto ogni diversa

circostanza di cateratte e di canali influisca sopra il corso dell'acqua e ne temperi il suo efflusso.

133. Dalle cose finora dette si comprende quanto l'arnese, di cui parliamo, e nell'uso delle dispense d'acque, e nell'arte di sperimentare possa rendersi dell'idraulica conoscenza benemerito; esso lo sarebbe assai più ancora se si avesse il coraggio di applicarlo al corso di qualche fiume per assoggettare a certa misura la sua portata in paragone dell'ampiezza e qualità, non che del clima del paese che gli tributa le sue acque, per esplorare tutte le sue vicende, e per determinare ogni accidente del suo corso ne' diversi stati di maggiore o minore altezza d'acque; cognizioni che somministrano fondamentali documenti della scienza de' fiumi. Noi abbiamo già parlato altrove di una specie di Regolatore adattabile ai grandi canali artificiali; tal sarebbe pressappoco da applicarsi anco a qualche fiume: la sua fabbrica consisterebbe nel ridurre un brevissimo tronco di canale ad una forma stabile e regolare con fondo piano ed orizzontale, con isponde verticali e fra loro parallele, le quali con dolce ed opportuna curvità all'insù prolungate formando imbuto, andassero ad unirsi alle ripe naturali del fiume; quando l'edificio del Regolatore non restringesse d'assai l'alveo di questo, ed il fondo dell'uno fosse a livello pressappoco dell'altro, come supporremo, la superficie della corrente sarebbe

naturalmente abbastanza piana ed orizzontale, onde non farebbe mestieri della traversa allo sbocco della gran doccia: non sarebbe praticabile il coperto dell'imbuto, ma non è tampoco necessario, correndo qui le acque da loro medesime spianate in superficie e senza pericolo di trabocco. Qualche ostacolo che si sporgesse alquanto fuori di una sponda, e presentasse al corso dell'acqua, che gli viene a dar dentro, una resistenza tale da farle perdere al suo contatto ogni movimento in superficie, servirebbe a dare a conoscere il battente da cui dipende la velocità della corrente: anche l'uso della canna ricurva di Pitot, munita al suo angolo di una lastretta di metallo, la quale non lasci l'ingresso all'acqua che per un piccolo forellino, escludendo così ogni ondeggiamento di quella, basterebbe a somministrare il genuino battente: dato il quale, e data l'altezza dell'acqua nel *Regolatore*, e quindi la sezione della corrente nella gran doccia fluviale, mediante l'espressione additata all'articolo 131 rimane determinata la quantità di fluido che trascorre pel finme in tale stato d'acqua; e così tanto in acque scarse, quanto in abbondanti ed in ogni piena si potrebbe avere la giusta misura della fluida copia che scorre per l'alveo fiumale; dico la giusta misura, poichè sebbene l'acqua, che lambe il fondo della doccia, potrebbe partecipare alquanto di quel piccolo ritardo che soffrisse nell'alveo naturale, questo in simil genere

di osservazioni sarebbe di poco apprezzabile valore in acque scarse, e di nessuna considerazione in acque copiose. Non tralascieremo qui di dire che quando la lunghezza e le circostanze del Regolatore permettessero di determinare immediatamente per mezzo di galleggianti la velocità della corrente in superficie, la cognizione di questa supplirebbe alla ricerca del battente, come ognuno può facilmente comprendere.

Anche una sola di queste macchine sopra qualche fiume costruita sarebbe il più utile arnese che l'arte idraulica potesse in suo sussidio desiderare. Se Vitruvio fosse stato architetto idraulico come fu sommo architetto civile, e conoscendo la vasta utilità di tale edificio, avesselo proposto ad un Giulio Cesare o ad un Augusto come opera degna delle loro imprese, questi saggi e potentissimi Principi, e massimamente il primo, vero domatore de' fiumi, avrebbero avuto cuore di farla eseguire non che sul Tevere, ma sul Po; nè questa sarebbe stata che una delle piccole fra le opere romane da essi intraprese; e forse ne' tempi dai nostri men remoti il Veneto Senato, splendido e magnifico negl' idraulici intraprendimenti, sarebbe stato abbastanza coraggioso per piantare questa macchina sopra i suoi fiumi, se un Montanari gliel' avesse raccomandata come assai giovevole, mercè dei lumi che può fornire per una saggia e generale direzione delle acque. Ma lasciamo da

canto queste intempestive idee, e supponendo ancora che niuno fosse stato in grado di assoggettare le grandi acque correnti al giogo di un Regolatore, non è colpa o difetto di questa macchina se i fiumi della natura sono vasti, e ristretti i modi o il cuore dell'uomo. Questa è l'unica misuratrice perfetta di ogni acqua corrente e di ogni fiume, e dove questa manchi, non si può usare che una maniera imperfetta di misura di cui abbiamo altrove favellato.

CAPITOLO IX.

Del Regolatore = a libera cateratta. =

134. Quantunque nell'uso del Regolatore = a piena doccia = tutto secondo le premesse cospiri alla semplicità, certezza e giustezza, non che alla felicità della dispensa dell'acqua, di modo che non possa soffrire paragone o scontro con alcun'altra pratica, esso solo essendo per ogni conto convenevole e perfetto; nulladimeno nel capitolo terzo di questa seconda parte per largheggiare abbiamo indicato che ci sarebbe altra maniera di dispensare le acque = a libera cateratta =, come noi la diremo, quando con un *coefficiente* costante, che venisse dalla sperienza somministrato, si potesse correggere l'effetto della contrazione di vena, moltiplicando cioè con esso il prodotto

parabolico che esprime la quantità dell' efflusso. Abbiamo anche geometricamente dimostrato, come ciò debba valere per qualche caso, ed insinuammo che alcune sperienze ce lo danno a credere per altri casi, comechè limitati. In tale supposizione, giacchè per una pratica convenevole di dispensa d'acque è indispensabile, come abbiamo dichiarato, che la vera ed assoluta quantità dell' acqua che si dispensa, venga rappresentata dalla grandezza medesima della cateratta per cui il fluido sgorga, converrà secondo l' osservazione dell' art. 97 combinare talmente fra loro l' altezza della cateratta colla grandezza del battente, prese queste due quantità costanti per qualunque varia larghezza di luce, che il prodotto parabolico denotante la quantità dello sgorgo indi risultante, modificato con quel tale *coefficiente* costante, sia sempre rappresentato dalla sezione medesima della cateratta.

Pongasi L la larghezza variabile della cateratta, A la sua altezza, B il battente; sarà, com' è noto, il prodotto parabolico di cui parliamo

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2g} L \left\{ (A+B)^{\frac{3}{2}} - B^{\frac{3}{2}} \right\},$$

g denotando il doppio spazio passato da un corpo in $\frac{1}{100}$ centesimo colla libera caduta, di cui altrove abbiamo dato il valore. Segnando dunque k quel *coefficiente* costante, dovremo secondo le premesse fare

$$\frac{2}{3} V(2g) L \left\{ (A+B)^{\frac{3}{2}} - B^{\frac{3}{2}} \right\} k = AL,$$

AL essendo la sezione della cateratta.

Pel valore del *coefficiente* k facciamo uso della ragione fra la vena contratta e la vena lata che ci danno gli *Sperimenti Idraulici* del signor Michelotti (vol. 1, fac. 91), la quale viene espressa per $\frac{265}{432} = 0,61342$; ponendo questo valore nell'equazione, ed avvertendo essere $g = 7,31969$, essa si trasformerà nella seguente:

$$1,5647 \left\{ (A+B)^{\frac{3}{2}} - B^{\frac{3}{2}} \right\} = A.$$

135. Infiniti valori diversi della A e della B , ciò sono dalla $A=0$ fino alla $A=0^{\text{m}},40844$, e dalla $B=0^{\text{m}},18153$ fino alla $B=0$, possono quadrare a quest'equazione; ma senza inciampare in alcun vizioso estremo noi piglieremo l'altezza $A=0^{\text{m}},30$, che sarà mezzana fra quelle dei moduli milanese e cremonese, e pressochè eguale a quella del veronese. Il che posto, si troverà che alla precedente equazione dovrà in pratica soddisfare il battente

$$B=0^{\text{m}},0418.$$

Nella fatta supposizione adunque del *coefficiente* k costante dando sempre al modulo l'altezza di $0^{\text{m}},30$, col battente di $0^{\text{m}},0418$, e variando soltanto la larghezza secondo la quantità dell'acqua che si vuol derivare, si otterrà l'intento che la cateratta medesima colla sezione

ci dica l' assoluta quantità di fluido che si dispensa; abbia, per esempio, una bocca la larghezza di quattro *decimetri*, sarà la sua sezione $= 0^{\text{m}},12$, e ci dirà che ogni 1° centesimo versa metri cubi d'acqua 0,12, ciò sono 12 mila metri cubi al giorno; e che si possono con essa ogni giorno irrigare 12 metriche *tornature* di campi.

136. Io qui non ripeterò quel ch'è già detto in fine dell' art. 97 intorno ai difetti di tal maniera di dispensa, ma aggiungerò che richiedendosi per essa una caduta non minore di met. 0,3418, accaderà non di rado che ne' luoghi di poca declività non sia praticabile, ovvero che sia la misura dell' acqua alterata pel ringorgamento delle acque inferiori, come più volte succede nel Veronese, il di cui modulo poca maggior cascata richiede. Nè si potrebbe andar incontro a questo inconveniente coll' assumere un' altezza A minore di $0^{\text{m}},30$, stabilendo, per esempio, che l' altezza costante del modulo esser dovesse come il milanese $= 0^{\text{m}},20$, ed aggiustando a questa il battente, perchè venga soddisfatto alla premessa equazione; imperocchè allora la forma del modulo diverrebbe in pratica troppo schiacciata e bislunga, il che renderebbe più incerto e fallace il *coefficiente* k sperimentato soltanto nelle figure quadre o rotonde: si può vedere che dica su ciò il mio *Ragguaglio Matematico*, fac. 42 (*). Si può inoltre osservare

(*) Veggasi pure l' annotazione quarta in fine.

che in questa ed altre simili pratiche, ove occorra di diminuire l'acqua alle bocche in una certa proporzione, secondo che vien meno la corrente del canal maestro, non si può dividere il battente con quella semplice scala che abbiamo additato all'art. 120; imperocchè la velocità dell'acqua e la sua copia non dipendendo qui dal solo battente d'acqua che si alza sopra il labbro della bocca, ma dalla profondità ancora sotto di esso, alla quale passa ogni fluida vena capillare, riuscirebbe la scala di divisione più intricata ed irregolare, e perciò men sicura. Non pertanto, malgrado tutti questi difetti ed altri che si passano sotto silenzio, se si usasse questo modo di dispensa = a libera cateratta = colle avvertenze da noi altrove suggerite pel botтино e per la cateratta maestra, sarebbe una tal pratica senza paragone migliore degli usi correnti, e massimamente del Milanese, perchè esso gioverebbe a farci conoscere l'assoluta quantità dell'acqua riferita alla sua unità di misura, il che con questi in nessuna maniera si ottiene; e senz' avere nè trombe coperte, nè calici scoperti, nè piani acclivi, nè piani declivi, nè altri requisiti che sono tante vere prove della imperfezione dell' edificio milanese, ma con un semplice modulo scolpito in un piano che lasci d'intorno alla luce una fascia di due o tre *decimetri* di larghezza, che serva alla totale contrazione della vena, fornirebbe una misura dell'acqua più giusta e più

regolare di quella che ci dà la pratica di Milano o d'altri paesi.

137. E poichè questo modo di dispensa d'acque = a libera cateratta = quanto è superiore alle altre pratiche finora usate, tanto è inferiore all'uso da noi suggerito = a piena doccia =, non crederei che d'ora innanzi un abile architetto potesse quello a questo preferire; tuttavia se ciò avesse giammai per combinazione di circostanze ad accadere, io avvertirò che là dove l'abbondante declività de' luoghi lo permetta, si potrà utilmente usare il Regolatore anche sotto questa forma a doppia, a tripla ecc. misura, come abbiamo suggerito in simili casi pel Regolatore = a piena doccia =, e sarà pel Regolatore a doppia misura il battente

$$B = 6^{\text{m}}, 5753;$$

e pel Regolatore a tripla misura avremo

$$B = 1^{\text{m}}, 4770, \text{ ecc.},$$

come senza molta difficoltà si può ricavare dalla premessa equazione fondamentale, facendo il secondo termine = $2A$, = $3A$, ecc. Anche questo solo ripiego, opportunamente posto in pratica ne' correnti usi, gioverebbe non poco a perfezionarli.

CAPITOLO X.

Sperienze fatte in piccolo col Regolatore = a piena doccia. =

138. I fluidi sono i corpi della natura più gelosi che si risentono d'ogni ancorchè fievollissima virtù motrice che gli stimoli, e perciò obbedientissimi alle leggi del moto dipendenti dalle forze sollecitatrici, ed ai dettati del calcolo, ch'è la fedel loro espressione: ove però del loro movimento parla l'esatta geometria, è inutile interrogare la speranza. Nulladimeno è natural vaghezza che sovente ci spigne a voler vedere in effetto quel che la matematica a voce ci esprime, ed a mettere così al cimento della prova il valore o il difetto dell'arte sperimentale nell'imitare l'impareggiabile giustezza della geometria. Cercai per questo ancor io di sperimentare l'effetto del Regolatore = a piena doccia = facendo costruire la macchina in piccolo, vale a dire colla doccia di sezione quadra, che aveva un *decimetro* di lato. Era dunque la sezione della doccia = 0,01; e la sua lunghezza fu circa quadrupla della sua altezza; l'imbuto ed il suo coperchio era esattamente secondo il prescritto dall'art. 110.

La macchina fu applicata ad un canale di acqua corrente che aveva otto o nove volte più di capacità che il Regolatore; e l'acqua da questo si versava con notabile caduta nell'inferiore rigagnolo. Per ricevere e misurare

l'acqua che sboccava dalla doccia feci preparare una bigoncia capace di un volume di acqua = $0^{\text{m}}, 0849$; essa si teneva galleggiante nell'inferiore rigagno, ed al momento che si voleva cominciare lo sperimento, si spingeva colle mani sotto la grondaja della doccia. Per misurare il tempo che l'acqua della doccia impiegava ad empire la bigoncia, usava il pendolo che batte i secondi centesimi, la cui lunghezza alla latitudine di Milano è di $0^{\text{m}}, 741640$; io teneva il pendolo rimosso dalla linea verticale, e nell'atto che il servo a ciò addestrato spingendo la bigoncia sotto la stroschia dell'acqua cadente, dava segno con un grido, io lasciava in libertà il pendolo perchè cominciasse a fare le sue vibrazioni, che io noverava finchè il famiglio gittava un altro grido al momento che vedeva tutta ripiena la bigoncia di acqua; la situazione verticale del pendolo mi segnava i mezzi minuti secondi, ed a certa discrezione o pratica notava ancora i quarti.

Io non poteva schivare alcune piccole variazioni che faceva il rigagnolo, di cui mi serviva in queste sperienze, onde al cominciare di esse il battente, ancorchè fosse stato avanti aggiustato all'esatta misura di $0^{\text{m}}, 0683$, si trovava alquanto alterato, e faceva qualche piccolo cangiamento durante la loro esecuzione; io perciò notava il battente alla prima sperienza ed all'ultima, onde prendere il mezzano fra i due, per far poscia la conveniente riduzione

del tempo in ragione permutata delle radici di questo battente e dell'esatto $= 0^{\text{m}},0683$.

Allo sbocco della doccia posi una piccola traversa alta sopra il fondo di quella $0^{\text{m}},021$, volendo a bello studio usare un'altezza alquanto eccedente, perchè sapeva che non recava alcun sensibile pregiudizio alla sperienza. La doccia fu in tal modo riempita, e tanto o quanto soverchiata, stendendosi un sottil velo di acqua corrente anche sopra le sponde; ma senza che al confine dell'imbutto, cioè al principio della doccia si sollevasse punto l'acqua a formare alcun contrario battente.

139. Dopo aver lungamente esercitato il famiglio alla pronta e destra operazione, nel dar principio alla prima sperienza osservai essere il battente alto $0^{\text{m}},072$; e siccome alla fine delle sperienze, che qui sotto descrivo, lo trovai disceso a $0^{\text{m}},0705$, considero il mezzano battente di tutti questi sperimenti $= 0^{\text{m}},0712$. Ciò premesso, ecco la tavola delle sperienze.

TAVOLA L

*Sperienze del Regolatore = a piena doccia = di sezione eguale
ad una centesima (= 0^{mm},01) con battente = 0^{mm},0712.*

*Avverti che si nota il tempo in centesimi minuti secondi speso a riempire
un vaso capace di un volume di acqua = 0^{mm},0849.*

Numero delle sperienze.	Tempo speso nel riempire il vaso.	Numero delle sperienze.	Tempo speso nel riempire il vaso.	Numero delle sperienze.	Tempo speso nel riempire il vaso.
1	8",50	17	8",00	33	8",00
2	8,00	18	8,00	34	8,00
3	8,00	19	7,75	35	8,00
4	8,00	20	8,00	36	8,00
5	7,75	21	8,00	37	8,25
6	8,00	22	8,00	38	8,00
7	7,75	23	8,00	39	8,00
8	8,25	24	8,00	40	8,00
9	8,00	25	8,00	41	7,50
10	8,25	26	8,75	42	8,00
11	8,00	27	8,25	43	8,00
12	8,25	28	8,00	44	8,00
13	8,00	29	8,00	45	8,25
14	8,25	30	8,00	46	8,50
15	8,00	31	8,25	47	8,00.
16	8,00	32	8,00		

Da questa tavola si ricava che il tempo mezzano speso nel riempiere il vaso fu di 8",05. Misurando il pendolo dopo terminata la sperienza, mi accorsi che la sua lunghezza era = 0^m,744 in vece della prescritta = 0^m,74164. Facendo dunque la dovuta doppia correzione al tempo per adattarlo al giusto battente 0^m,0683 ed alla giusta misura del pendolo, si trova

$$\frac{\sqrt{0,0712} \times \sqrt{0,744}}{\sqrt{0,0683} \times \sqrt{0,74164}} 8",05 = 8",232.$$

In questo tempo adunque = 8",232 il Regolatore ridotto a giusto battente = 0,0683 ha versato un solido d'acqua = 0^m,0849; onde sta la faccenda in questi termini, cioè:

Sezione della	Quantità dell' efflusso in 1" cent. ^o		Errore della
	secondo il calcolo.	secondo la sperienza.	
doccia.			sperienza.
0,01.	0,01.	0,0103.	0,03.

L'errore della sperienza è preso in paragone della giusta quantità considerata = 1.

140. Ben si vede non essere questo che un piccolo saggio imperfetto di sperimenti; il vaso che riceveva l'acqua era troppo piccolo in paragone della doccia che la versava, quindi troppo breve il tempo per empier quello; e non potendo ben adocchiare le frazioni del minuto secondo, come la tavola medesima ne fa fede, gli errori di queste divenivano sensibili nella corta durata di quello.

Nulladimeno simili svarj tendono a compensarsi fra loro, e l'errore della sperienza, se non in tutto, in gran parte almeno trae origine da altro fonte. La grondaia dell'acqua che piombava sopra il fluido già versato nella bigoncia, produceva nella superficie di questo una cavità; onde al momento che il famiglio vedendo soverchiate le sponde del vaso dava il convenuto segno del suo riempimento, il vaso in realtà non era pieno; anche l'ondeggiamento dalla medesima cagione prodotto nell'acqua del vaso concorreva ad accrescere il medesimo errore. Si può pertanto ritenere che senza il disfavore di questa circostanza lo svario della sperienza, che per altro non è se non di tre centesime parti della giusta quantità, sarebbe riuscito di assai minore considerazione.

141. Per mostrare quanto poco influisca sopra la quantità dello sgorgamento il dare alla traversa della doccia alquanto abbondante altezza, come noi facemmo, aggiungeremo qui che il predetto sperimento fu per curiosità cinquanta fiate ripetuto colla traversa alta $0^{\text{m}},40$, cioè doppia della precedente, e l'avvenimento fu, che in parità di battente si ebbe la copia dell'acqua versata $= 0^{\text{m}},0101$, vale a dire calò soltanto di due centesime parti. L'acqua sormontava le sponde della doccia assai più che nella precedente sperienza, ma al confine dell'imbuto non vi era che $0^{\text{m}},001$ di contrario battente.

CAPITOLO XI

*Sperienze del Regolatore = a piena doccia =
eseguite più in grande.*

142. Dopo il piccol saggio delle descritte sperienze m'invogliai a farne altre in grande e meno ad errori soggette. Fu perciò costruito un Regolatore con doccia alta $0^{\text{m}},4233$ e larga $0^{\text{m}},1973$, vale a dire di sezione $= 0^{\text{m}},0835$, e le si diede la lunghezza di met. 1,46. Il suo imbuto e tutto il resto era secondo il prescritto degli articoli 110 e 111. La traversa posta allo sbocco della doccia si alzava sopra il suo fondo $0^{\text{m}},10$ ed anche più, poichè holla talvolta alquanto a capriccio variata, sperimentando il nessun effetto che le piccole variazioni producevano sopra la quantità dell'efflusso. La macchina fu piantata in isponda di una fontana, le cui acque si usano ad irrigare le campagne; la minima larghezza del ruscello avanti il Regolatore era di met. 2,70, ma su la direzione alquanto obliqua dell'asse della doccia essa riusciva di met. 3,40; la sua profondità avanti il Regolatore non era minore nel mezzo di met. 0,70, e la velocità di sue acque in vicinanza di quello non era mai maggiore di un metro in dieci secondi sessantesimi.

Per ricever l'acqua che dovea scaricarsi dalla doccia, si formò una cava quadrilatera e rettangola nel terreno di

natura cretoso ed impenetrabile all'acqua. Per misurare con esattezza la sua capacità, da cui dipender doveva la giusta misura dell'acqua dalla doccia versata, furono prese a diverse altezze ottanta misure de' suoi lati; fu così determinata la mezzana sua larghezza di met. 2,2137, e la mezzana lunghezza di met. 6,5182, che danno l'ampiezza della cassa eguale a metri quadri 14,4293; alla quale aggiugnendo quella del tronco di canale posto fra la doccia e la cava, ch'era $\equiv 0^{\text{met}},8658$, si ha l'intera ampiezza o media sezione orizzontale del vaso eguale a metri quadrati 15,2951. Tal era la mezzana capacità di questa cassa entro i confini di quell'altezza ch'era occupata dall'acqua nelle sperienze. Il fondo della cassa si lasciava coperto di acqua fino al livello di un segnale, affinchè si avesse una superficie orizzontale.

143. Il ruscello era attraversato da un piano verticale con cateratta nel mezzo munita d'imposta, la quale serviva per regolare, secondo il bisogno, l'altezza dell'acqua avanti la macchina. Pel lungo corso del ruscello ed anche per le frequenti piccole variazioni cui era soggetto, non essendo possibile l'ottenere almen con discreta prontezza l'altezza precisa 0,0683 del battente, e facendo esso ancora qualche cangiamento durante il tempo di ciascuna sperienza, io regolava in modo il corso dell'acqua col maneggiamento dell'imposta sopra mentovata, che quando il battente era

poco più o poco meno di 0,0683, il suo crescere o calare fosse lentissimo; e quando trovava le cose in questo stato, ordinava che fosse chiusa coll' imposta la cateratta del ruscello, ed immantinente, essendo armata d' imposta anche la bocca del Regolatore, dava segno perchè questa fosse alzata, e nell'atto medesimo lasciava scattare dalla mano il pendolo per misurare colle sue vibrazioni il tempo a centesimi minuti secondi.

Io contava le vibrazioni ad alta voce, e quando giugneva alla 70.^{ma}, il famiglio a ciò ammaestrato calava in un attimo l' imposta, levando l' acqua al Regolatore. Per determinare il battente colla giustezza che si poteva maggiore, il famiglio alla 10.^{ma} vibrazione segnava su la fronte del Regolatore ove giugneva il pelo dell' acqua stagnante conficcandovi la punta di uno spillo; ripeteva la stessa operazione con altro spillo alla 35.^{ma} vibrazione, poi altra col terzo spillo alla vibrazione sessantesima. La media fra queste tre altezze, contando due volte la seconda, mi dava il mezzano battente di ciascheduna sperienza: assai rare volte la massima differenza fra il mezzano battente e qualunque delle tre altezze segnate cogli spilletti è giunta a met. 0,003, e per lo più il divario non arriva alla metà di questa. Terminato lo sgorgamento dell' acqua, si misurava l' altezza di questa nella cassa, e si determinava l' esatta quantità dell' efflusso.

144. Io osservai che nel calare l'imposta del ruscello ; e nell'alzare quella del Regolatore si eccitava nella massa dell'acqua avanti di questo un sensibile ondeggiamento che durava alquanti minuti secondi, e fu questa una delle ragioni per cui il primo spillo non si collocava a posto se non se alla decima vibrazione del pendolo. Nel chiudere all'acqua il passaggio per la cateratta del ruscello , e nel darglielo in vece pel Regolatore, il battente ora cresceva ed ora calava di qualche *millimetro* , secondo che per le piccole variazioni del rigagno l'acqua di questo era ora tanto o quanto più, ed ora tanto o quanto meno di quella che versava il Regolatore. Al primo levarsi dell'imposta alla bocca di questo l'acqua precipitandosi nella vota cavità dell'imbuto e della doccia, s'inclinava colla superficie all'ingiù, ed andando a percuotersi nella traversa, balzava con impeto e gorgoglio in alto formando un cavallone soverchiante non poco le sponde della doccia, talchè la superficie della corrente entro la doccia era disposta in forma concava, con una estremità toccando il cielo dell'imbuto, e coll'altra sollevandosi fino alla sommità del cavallo ; questa cavità lasciava un voto nella doccia, ma tosto il cavallo si abbassava, e questa si empieva ; non si vedeva però bene spianata la superficie della corrente entro la doccia, se non dopo sette od otto vibrazioni del pendolo, ed in tale stato poi si manteneva durante il

tempo della sperienza. Benchè la superficie dell'acqua nello stato suo permanente fosse ridotta lungo la doccia ad un piano orizzontale, ognuno s'immaginerà quel ch'è in fatti, vale a dire che la corrente vicino al contatto della traversa dovesse alquanto gonfiarsi per la piega all'insù che prendono i fluidi fili presso al contatto dell'ostacolo per superarlo; in effetto la corrente per l'innanzi piana, giunta ch'era a met. 0,20 circa dallo sbocco, formava un piccol colmo, soverchiando le sponde coll'altezza all'incirca di met. 0,02; indi cadeva velocitandosi, ed alla distanza di met. 0,10 dalla traversa pareggiava di nuovo le sponde, sotto il livello delle quali si trovava finalmente avvallata met. 0,02 quando era sopra la traversa in procinto di sgorgare.

145. Premesse queste cose, soggiungo qui la tavola delle sperienze, che sarà abbastanza chiara per non aver bisogno di altra spiegazione.

TAVOLA II.

*Sperienze del Regolatore = a piena doccia =
di sezione 0^m,0831.*

La durata del tempo speso in ogni esperienza è di 70^e centesimi.

Numero delle esperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell'efflusso secondo		Errore dello sperienza in ragione del tutto.
		il calcolo.	la sperienza.	
	metri.	metri cubi.	metri cubi.	
1	0,0677	5,8191	5,9344	+ 0,0198
2	0,0687	5,8620	5,7968	— 0,0111
3	0,0702	5,9256	5,7050	— 0,0372
4	0,0680	5,8320	5,8274	— 0,0007
5	0,0692	5,8832	5,7968	— 0,0146
6	0,0686	5,8577	5,9192	+ 0,0104
7	0,0695	5,8960	5,7203	— 0,0298
8	0,0690	5,8747	5,8886	+ 0,0023
9	0,0690	5,8747	6,2556	+ 0,0648
10	0,0685	5,8534	6,2709	+ 0,0711
11	0,0690	5,8747	5,8580	— 0,0028
12	0,0687	5,8620	5,8274	— 0,0059
13	0,0665	5,7673	5,8121	+ 0,0077
14	0,0693	5,8875	5,9344	+ 0,0079
15	0,0690	5,8747	5,8886	+ 0,0023
16	0,0723	6,0136	5,7509	— 0,0436
17	0,0711	5,9635	5,9803	+ 0,0028
18	0,0702	5,9256	5,9803	+ 0,0092
19	0,0696	5,9002	6,3015	+ 0,0680
Somme .		111,7475	112,4485	
Differenza . . =		0,7010		
Errore mezzano della sperienza . =		0,0062		

146. Si vede che le sperienze sono migliorate non poco in paragone del precedente saggio, poichè dove prima l'errore mezzano degli sperimenti era del tre per cento, ora giunge a poco più del mezzo per cento; nulladimeno anche in queste seconde prove si può desiderare qualche maggiore uniformità fra le une e le altre, poichè ve ne ha tre, cioè sono le 9, 10, 19, che fallano del sei ed anche del sette per cento. Ogni sperienza reca sempre seco un multiplice seme di errore; tali sono nell'affare presente gli accidenti motivati nell'art. 144, e la più o men lenta opera di chi alza e di chi abbassa l'imposta al principio ed al fine d'ogni sperimento, ed altre piccole circostanze che talvolta sfuggono l'occhio anche di un diligente osservatore; tuttavia non credo che eziandio il concorso di tutte queste minute cagioni di fallo potessero bastare a rendere sì errate, come sono, le tre mentovate sperienze; io perciò ripeto in gran parte il loro fallo da un'altra cagione, ch'è un'onda eccitata nell'acqua della cassa dalla fluida vena che in essa si versava, la quale sembrava percorrere la lunghezza della cava; in fatti il famiglio che, appena abbassata l'imposta del Regolatore, prendeva sul momento con un regolo la misura dell'altezza dell'acqua sgorgata nella cassa, mi ha più d'una volta accusato un'onda che non gli lasciava ben discernere la precisa altezza suddetta; ed io ho poscia riconosciuto che

questa poteva cagionare uno svaro sensibile in qualche sperienza.

147. Checchessia di ciò, che per altro sconcerta di poco, come vedemmo, la totalità delle sperienze, io fui vago, poichè ebbi tempo, di ripigliare questo divertimento, e di recarlo ancora a maggiore perfezione; il che dipende massimamente dal poter aggrandire il vaso destinato a ricever l'acqua che si versa dalla doccia, affinchè la sperienza durar possa più lungo tempo. Imperocchè tutte le sorgenti de'suoi errori sono riposte nelle circostanze che accompagnano il cominciamento ed il termine d'ogni sperimento; quanto adunque la durata e l'effetto di questo risulta maggiore, tanto meno in esso riescono sensibili i piccoli falli inseparabili dal suo principio e dal suo fine. Volendo adunque con tale idea intraprendere novelle prove in sito opportuno poco distante dal primiero, feci scavare nel terreno una cassa per ricever l'acqua sgorgante dalla macchina molto più capace della prima: essa fu di forma quadrata, co' lati che variavano dai metri 4,907 ai 5,008. Fu pure adattata aggiustatamente la macchina, di cui mi era servito nelle passate sperienze, rifatta essendosi di nuovo la sua imposta coi corrispondenti incastri, affinchè con agevolezza si aprisse e si serrasse, e serrata che fosse, chiudesse quanto si poteva più l'ingresso all'acqua.

Per conoscere l'esatta capacità della cava , dalla quale dovea dipendere la giusta misura dell'acqua , furono ad ogni lato di essa collocati otto legnetti verticali disposti ad eguali distanze fra loro , lunghi un metro e divisi ciascuno in dieci parti eguali ; poi con un regolo lungo intorno a met. 4,50 , ed un altro poco più lungo di mezzo metro , che sopra il primo si faceva scorrere innanzi e indietro secondo il bisogno , si pigliarono le misure della larghezza del vaso per ogni verso a ciascun legnetto ed a ciascun *decimetro* di sua altezza , in guisa che furono tolte censessanta misure. Fu separatamente determinata la solidità del vaso per ciascun *decimetro* di altezza , a fine di poter valutare la giusta misura dell'acqua che conteneva secondo la varia elevazione del fondo da cui si volesse cominciare l'empimento della cassa , e secondo la varia altezza sopra tal orizzontale cui poteva giugnere l'acqua versata , la quale non batteva che intorno ai sette od otto *decimetri*.

Avvegnachè in queste sperienze io abbia fatto uso del Regolatore di cui mi sono servito nelle antecedenti , pure essendosi nel suo acconciamento alquanto alterata la sezione della doccia , fu di questa fatto nuovo e diligente misuramento sì in altezza che in larghezza ; ed essendosi ritrovata la mezzana fra venti larghezze essere di met. 0,19760 , e la mezzana fra dieci altezze di met. 0,41285 ,

venne stabilita la grandezza della sezione, o capacità della doccia al confine dell'imbuto di met. quad. 0,08157.

148. La profondità del cavo essendo maggiore dell'ordinaria altezza d'un uomo, era penetrata in un letto di ghiaja, donde scaturiva acqua; questa però non si alzava che fino intorno a due *decimetri* sopra il livello del segnale, da cui cominciavano le nostre misure dell'acqua sgorgata, ed era sì lento il suo crescimento, che mentre pareggiava il segnale, ci metteva più di 100" centes. a sormontarlo con un' altezza di met. 0,002; il quale aumento andava più e più ritardandosi e scemandosi a misura che l' altezza dell'acqua cresceva, finchè diveniva = 0, quando l' acqua era giunta all' indicata altezza di met. 0,2 sopra il segnale. All' opposto, allorchè versando acqua nel vaso si faceva salire sopra tal confine della sorgente, questa in certo modo diventava negativa, ed il fondo ghiaioso in vece di tramandare acqua, la assorbiva: l' assorbimento in 100" appariva di met. 0,001, quando l' acqua nella cava era alta met. 0,5 sopra il fissato livello, e di met. 0,0026, quando era alta met. 0,7. A queste piccole alterazioni si aggiugneva ancora quella di alquanto acqua, che dopo calata l' imposta del Regolatore passava feltrandosi fra questa ed i suoi incastri, staccato essendosi nell' apri-mento della cateratta il mastice di terra, col quale suggellavasi all' intorno ogni commessura.

Per valutare tutte queste benchè lievi alterazioni della vera quantità d'acqua sgorgata dalla doccia durante il tempo della sperienza, oltre le generali osservazioni dell'aumento o scapito dell'acqua della cava fatto secondo le diverse altezze del suo livello, usava altre avvertenze in ciascheduna sperienza: imperocchè presa che si era la misura dell'acqua sgorgata (la quale soleva pigliarsi 100" circa dopo di aver chiusa coll' imposta la cateratta, affinchè avessero campo di sedarsi le onde dall' impeto dello sgorgamento nella cassa eccitate), con replicate e triplicate osservazioni si notava quanto il livello dell'acqua medesima nel vaso si alzasse o si abbassasse in ragione di 100" di tempo; e col sussidio di queste particolari indagini e delle osservazioni generali si faceva a ciascheduna sperienza la conveniente correzione, il massimo della quale non eccede la quantità di met. 0,0010 sottratta alla altezza dell'acqua misurata, allorchè questa per le menovate cause accidentali nel vaso cresceva, e di met. 0,0037 aggiunta, quando in vece calava, com'era l'ordinario.

149. La traversa posta al confine della doccia erasi a bello studio collocata un centimetro circa più alta del bisogno, di modo che l'acqua cominciava a gonfiarsi, ed a superare alquanto le sponde ad una distanza di met. 0,3 dall'imbuto, non soverchiandole però in tal sito che coll'altezza di pochi *millimetri*; questa innondazione delle

sponde cresceva gradatamente fino alla sommità del descritto cavallo, discendendo poscia la corrente nel modo pressappoco dichiarato nelle antecedenti sperienze; pel mentovato piccolo soverchiamento delle sponde nessuna porzione di acqua si dispergeva per essere la doccia incassata nel terreno.

La durata delle prime due sperienze fu di 200" centes., e di 240" quella delle rimanenti. Per segnare il battente nelle prime due sperienze i tre spilli erano collocati al pelo dell'acqua nel seguente modo, cioè il primo a 20", il secondo a 100", il terzo a 180"; nelle altre sperienze poi il primo era messo a posto a 20", il secondo a 120", e finalmente il terzo a 220".

Pel rimanente le nuove sperienze sono state eseguite ne' modi e colle cautele usate nelle precedenti. Ogni sperienza mi obbligava a far votare la cassa a braccia d'uomini, non avendo l'acqua alcuno sfogo. Ecco pertanto il successo di questi sperimenti espresso nella seguente tavola.

TAVOLA III.

Nuove sperienze del Regolatore = a piena doccia. =

Sezione della doccia = 0^m,08157.

Durata delle sperienze di 200^e centes. per le prime due, e di 240^e per le altre.

Numero delle sperienze.	Bettente mezzano.	Quantità dell'effluvio secondo		Errore delle sperienze in ragione del tutto.
		il calcolo.	la sperienza.	
	metri.	metri cubi.	metri cubi.	
1	0,0687	16,363	16,340	— 0,0014
2	0,0740	16,983	16,915	— 0,0040
3	0,0636	18,893	19,219	+ 0,0172
4	0,0690	19,679	19,533	— 0,0074
5	0,0622	18,684	19,031	+ 0,0185
6	0,0670	19,392	19,332	— 0,0030
7	0,0635	18,878	19,106	+ 0,0120
8	0,0667	19,348	19,470	+ 0,0063
9	0,0678	19,507	19,407	— 0,0051
10	0,0657	19,202	19,131	— 0,0036
11	0,0565	17,808	17,840	+ 0,0018
12	0,0661	19,261	19,400	+ 0,0072
13	0,0669	19,377	19,450	+ 0,0037
14	0,0686	19,622	19,525	— 0,0049
15	0,0680	19,536	19,600	+ 0,0032
16	0,0685	19,607	19,788	+ 0,0092
17	0,0794	21,110	20,629	— 0,0227
18	0,0680	19,626	19,650	+ 0,0012
19	0,0655	19,173	19,475	+ 0,0151
20	0,0657½	19,210	19,425	+ 0,0111
Somme .		381,259	382,266	
Differenza = 1,007				
Errore mezzano della sperienza = 0,0026				

150. Il confronto di questa tavola colla seconda fa chiaramente vedere quanto le presenti sperienze siano più accurate delle antecedenti; imperocchè non solo il mezzano errore di queste è minore della metà del fallo di quelle, ma dove nelle precedenti vi erano diversi sperimenti, il cui errore montava al sei ed al sette per cento, in queste ve ne ha un solo che falli di due per cento, e questo è il diciassettesimo; ma simile svaro mostra non l'error suo, ma la sua giustezza; imperocchè essendo l'altezza della traversa, come si è avvertito, alquanto più del dovere, cioè più di quella che convenga al fondamentale battente 0,0683, l'effetto di quest'eccesso, che non è sensibile per un tal battente, divenir deve di qualche considerazione ad un battente più forte, perchè questo è più intollerante d'un'alta traversa. Ora la sperienza diciassettesima fu in questo caso, poichè ebbe un massimo battente $= 0,0794$, cioè 0,0111 più del fondamentale; per l'opposta ragione la sperienza undecima, ch'ebbe il minimo battente $= 0,0565$, cioè 0,0118 minore del fondamentale suddetto, fu una delle più conformi alla precisione del calcolo, perchè l'altezza della traversa, ch'era abbondante pel battente 0,0633, diveniva più moderata e più giusta per essa. Noteremo ancora in questo luogo, che se alle altezze dell'acqua versata nella cassa non si fossero fatte le dovute piccole correzioni, l'errore mezzano sarebbe riuscito eziandio minore, e negativo.

151. Paragonando insieme tutte tre le tavole, si può osservare quanto si perfezionino le sperienze a misura che la loro durata è più lunga, perchè gli sconcerti o falli che succedono solo al cominciare ed al finire degli sperimenti, diventano in questi più e più insensibili a misura che sono per più lungo tempo continuati; dal che si può ricavare che nella dispensa perenne delle acque fatta col Regolatore a piena doccia la misura loro deve riuscire sommamente esatta.

CAPITOLO XII.

*Sperienze del Regolatore = a piena doccia =
ma colla dispensa ridotta = a mezza misura. =*

152. Nel genere di sperienze, di cui parliamo, si cercherebbe eccessiva squisitezza volendole recare ad un grado maggiore di precisione e di conformità col calcolo, di quello che abbiamo ottenuto; nulladimeno ciascun può a suo talento proceder oltre sulla via che abbiamo additato, e può recare gli sperimenti a quantunque maggior perfezione sia per piacergli, usando più e più diligenza nella costruzione della macchina e nell'addestrarsi al suo maneggiamento, e soprattutto ampliando a beneplacito il vaso in cui deve sgorgare l'acqua, affinchè si possa vie più prolungare la durata d'ogni sperimento, ch'è quella che ingoja, per così

dire, e fa sparire gli errori. Io dunque, senza curarmi di progredire più oltre nelle descritte sperienze, era in vece curioso di far prova del Regolatore a doppia misura, vale a dire col battente quattro volte maggiore dello stabilito $= 0,0683$, il quale raddoppia la dispensa dell'acqua, e fa in conseguenza che la sezione della doccia vaglia pel doppio; ma questo mi obbligava a profondare di troppo la cava, dal che nascevano due gravi inconvenienti, l'uno per la copia delle acque sorgenti che avrebbe disturbato le operazioni, l'altro per la maggiore difficoltà nel fare ad ogni sperienza gettar l'acqua colle pale per votare la profonda cassa. Pensai dunque di sperimentare in vece il Regolatore a mezza misura, cioè di battente $= \frac{0,0683}{4}$ $= 0,01707$, il quale conferisce all'acqua mezza velocità, cioè quella per cui si passa mezzo metro in un minuto secondo della nuova divisione del tempo. In questo modo la sezione della doccia non si conta che per la metà; onde la dispensa è $=$ a mezza misura. $=$

Le sperienze precedenti rispetto a queste sono a doppia misura, onde lo sperimentare il Regolatore a mezza misura mi vale quanto il provarlo a doppia misura, come desiderava: se non che la sperienza si rende così più gelosa, e vuol essere maneggiata con più cautela, perchè un piccolo errore nel battente diviene ben sensibile nell'esito di quella; ed io la rendetti ancora più difficile,

perchè volli a posta tenere la traversa tanto alta che l'acqua della doccia a tergo del coperchio dell'imbuto formasse alquanto di contrario battente, il quale si dovesse sottrarre all'apparente segnato su la fronte del Regolatore per avere il genuino battente attivo, avendo in mira di mettere anche questo accidente al cimento della prova. La traversa pertanto era posta sì alta allo sbocco della doccia, che la sua sommità non era che met. 0,19 sotto il livello delle sponde. Io poi con ripetute osservazioni mi assicurai che quando il battente alla fronte del Regolatore segnava l'altezza di met. 0,017, la superficie dell'acqua della doccia a tergo dell'imbuto formava un contrario battente = 0,003; e questo diveniva = 0,007 quando la suddetta altezza avanti il Regolatore saliva a met. 0,025, di modo che la differenza = 0,008 del primo battente dava fra i detti limiti un divario di 0,004 nel contrario battente, ch'è la sua metà; ed ebbi facilmente a conoscere che fra i medesimi confini, o in poca loro distanza gli aumenti del contrario battente erano pressappoco proporzionali agl'incrementi del battente che appariva segnato sul prospetto del Regolatore, vale a dire un *millimetro* d'aumento in quest'ultimo produceva mezzo *millimetro*. d'incremento in quello. Con questa regola sperimentata abbastanza giusta io riduceva l'apparente altezza del battente seguita coi soliti spilli sulla fronte del Regolatore

alla vera e genuina altezza del battente attivo in ciascuna speriienza; e questo è quello che si troverà descritto sotto il consueto nome di battente mezzano nella seguente tavola delle speriienze.

153. La durata di ciascuno speriimento era di 240" centes. come ne' precedenti, e parimente gli spilli per notare il battente segnato dall'acqua su la fronte del Regolatore erano posti a luogo, il primo alla 20.^a vibrazione del pendolo a secondi centes., il secondo alla 120.^a, ed il terzo alla 220.^a vibrazione. Furono inoltre usate le cautele praticate nelle antecedenti prove. L'esito delle speriienze fu quale è indicato nella tavola che soggiungo.

TAVOLA IV.

*Sperienze del Regolatore = a piena doccia = di dispensa
ridotta a mezza misura.*

Sezione della doccia = met. qu. 0,08157. Durata d'ogni esperimento = 240" cent.

Numero delle sperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell'efflusso secondo		Errore della speranza in ragione del tutto.
		il calcolo.	la speranza.	
1	0,01563	9,3662	9,6111	+ 0,026
2	0,01500	9,1755	9,3780	+ 0,022
3	0,01488	9,1387	9,3002	+ 0,017
4	0,01633	9,5883	9,4298	- 0,016
5	0,01650	9,6233	9,4039	- 0,022
6	0,01450	9,0213	9,0411	+ 0,002
7	0,01588	9,4408	9,3585	- 0,008
8	0,01500	9,1755	9,3780	+ 0,022
9	0,01500	9,1755	9,2225	+ 0,005
10	0,01738	9,8766	9,6111	- 0,026
11	0,01938	10,4294	9,9480	- 0,046
12	0,01345	8,6885	8,9634	+ 0,031
13	0,01563	9,3661	9,3520	- 0,001
14	0,01713	9,8053	9,5852	- 0,022
15	0,01555	9,3422	9,3002	- 0,004
16	0,01475	9,0987	9,1966	+ 0,010
17	0,01655	9,6379	9,4557	- 0,018
18	0,01805	10,0652	9,8702	- 0,019
19	0,01535	9,2910	9,3780	+ 0,009
20	0,01805	10,0652	9,8443	- 0,022
21	0,02025	10,6583	10,1293	- 0,049
22	0,01775	9,9810	9,8184	- 0,016
23	0,01425	8,9432	9,0670	+ 0,013
24	0,01544	9,3091	9,3261	+ 0,001
25	0,01370	8,7689	8,9893	+ 0,025
26	0,01412	8,9023	9,0411	+ 0,015
27	0,01413	8,9054	9,1707	+ 0,029
28	0,01468	9,0771	9,1318	+ 0,006
29	0,01488	9,1387	9,1707	+ 0,003
30	0,01781	9,9981	9,6630	- 0,033
Somme	0,47700	283,0535	282,1352	
	Differenza	= 0,9183		
	Errore mezzano della speranza	= - 0,0032		

* In altro manoscritto questo battente fu per idaglio posto su 0,01600, che dare l'errore della speranza su - 0,010 in vece di - 0,022; donde risultava la sua l'errore mezzano su - 0,0045 in cambio di - 0,0032.

154. Dalla somma dei battenti divisa pel numero delle sperienze risulta che il medio fra tutti fu di met. 0,01590, vale a dire un *millimetro* circa minore del battente 0,017, che corrisponde all'esatta dispensa = a mezza misura = ; non essendo possibile pei variabili accidenti del rigagno il cogliere nel preciso punto di tal battente, il che è poi del tutto inutile, giacchè il calcolo è applicato al vero e genuino battente di ciascheduno sperimento.

I massimi errori di queste sperienze sono quelli della 11.^a e della 21.^a, i quali giungono quasi al cinque per cento, ch'è più del doppio del massimo errore della precedente tavola; la qual cosa è ben consentanea a quanto abbiamo avvertito intorno alla maggiore difficoltà del geloso sperimento cagionata dalla molta piccolezza del battente: ed è degno di osservazione che in queste non meno che nelle precedenti sperienze i massimi svarj corrispondono ai maggiori battenti, e sono negativi; il che mostra che in entrambe è ciò derivato dall'avere a bello studio tenuto la traversa più alta del bisogno, come già venne notato parlandosi della precedente tavola. E si potrà di più nella presente osservare che tutti gli errori negativi, i quali giungano al due per cento, corrispondono a battenti non minori di 0,01650, ed ai battenti minori di questo non s' accoppiano che errori o assai più piccoli o positivi; il che tutto collima a mostrare ciò ch'era in fatti, vale a

dire che l'altezza abbondante della traversa riusciva più eccedente pei maggiori che pei minori battenti. Per altro sebbene l'altezza della traversa fosse qua più, là meno, ma sempre soverchia per tutti i battenti (così avendo voluto a bella posta sperimentarla), pure in ultimo l'errore mezzano della totalità degli sperimenti non ha potuto giungere che soltanto ad un terzo per cento, il che mostra evidentemente che alquanto soverchio nell'altezza della traversa (e lo stesso per contraria ragione dicasi di alquanto scemo) non pregiudica in alcun modo sensibile alla giustezza della dispensa.

CAPITOLO XIII.

Delle Sperienze del Regolatore = a libera cateratta. =

155. In queste sperienze volli far uso di una cateratta che avesse di luce una decima parte di metro quadrato, e che fosse di forma quadra; essa era scolpita in un piano verticale ed abbastanza ampio per lasciare intorno alla bocca una fascia piana abbondantemente sufficiente per la consueta contrazione della vena; il contorno della cateratta era formato con quattro lastre di ferro, la cui grossezza era di met. 0,002, la precisa larghezza della sua luce era di met. 0,3155, e la precisa altezza di met. 0,3166, le quali davano l'esatta sezione di met. quad. 0,09988.

L' altezza di questa cateratta era pressappoco quella già da noi assegnata pel Regolatore a libera cateratta (art. 135); nel battente ho largheggiato alquanto più , perchè in queste sperienze non poteva regolare l' affluenza del rigagno in modo d' ottenere in ciascheduna sperienza un battente pressochè eguale a met. 0,0418 suggerito nel citato articolo, e di rendervelo poco men che costante (come richiede la maggior esattezza della sperienza, e come fu perciò sempre osservato in questi ed in altri sperimenti) senza consumarvi troppo lungo tempo ; e non valeva la pena il prendersi tal cura , poichè in queste sperienze alquanto divario di battente conta assai poco, atteso che qui tutta l' altezza della cateratta fa funzione di battente ; oltre di che, come abbiamo altrove osservato, per lo scopo delle sperienze è del tutto indifferente l' usare o questo o quel battente, poichè il calcolo e lo sperimento sono sempre adattati al vero e genuino battente di ciascheduna prova.

Queste sperienze furono istituite dopo quelle della tavola seconda, e si fece uso della medesima cava per ricevere e misurare l' acqua sgorgata. La durata d' ogni sperimento era di 60" centes. (si rammenta essere $1'' \text{ centes.}^o = \frac{\text{giorno}}{100000}$). Per segnare il battente i tre soliti spilletti erano appuntati a sito alle vibrazioni 10.^a, 30.^a, 50.^a del pendolo che notava i detti secondi. Nel resto si sono usate le avvertenze praticate nelle anzidette sperienze.

156. Il prodotto d'ogni *sperienza* è posto al paragone del prodotto parabolico modificato col *coefficiente* costante $= \frac{265}{432}$ secondo le osservazioni del capitolo IX, nè ad altro che a questo confronto mirano le presenti prove, delle quali si vede l'avvenimento nella seguente tavola.

TAVOLA V.

Sperienze del Regolatore == a libera cateratta. ==

Forma della cateratta quadra, luce == met. quad. 0,09988.

Durata d'ogni sperienza == 60^e centes.

Numero delle sperienze.	Battente mezzano.	Quantità dell'acqua sgorgata. Prodotto	
		Parabolico.	Sperimentale.
	metri.	metri cubi.	metri cubi.
1	0,0664	6,5144	6,7180
2	0,0658	6,5048	6,5760
3	0,0640	6,4757	6,5445
4	0,0745	6,6428	6,5918
5	0,0968	6,9814	6,8441
6	0,0649	6,4903	6,6549
7	0,0980	6,9991	7,0176
8	0,0885	6,8578	6,7811
9	0,0883	6,8547	6,8599
10	0,0770	6,6818	6,9545
11	0,0810	6,7444	6,6391
12	0,1008	7,0402	6,9230
13	0,0808	6,7406	6,7022
14	0,0700	6,5718	6,7811
15	0,0708	6,5845	6,5445
16	0,0713	6,5925	6,5760
Somme. . .		107,2768	107,7083
Differenza		= 0,4315	
Svario mezzano		= 0,0040	

157. Non si pone in questa tavola l'errore della speranza, perchè il calcolo parabolico non essendo di sua natura esatto, rimane incerto se lo svario che passa fra il suo prodotto e quello della speranza sia errore dell'uno, anzi che dell'altra, o di ambedue.

Le maggiori luci, nelle quali il signor Michelotti ha sperimentato la ragione della vena contratta alla vena lata $= \frac{265}{432}$ da noi assunta per *coefficiente* costante nel calcolo del prodotto parabolico, furono di nove pollici quadri del piede di Parigi, che corrispondono a met. quad. 0,00659; onde la nostra cateratta fu di una luce quindici volte maggiore di queste; nulladimeno essendosi trovato meno di un mezzo per cento di divario fra il prodotto delle precedenti sperienze ed il risultamento del calcolo modificato con tal coefficiente costante, convien dire che la contrazione di vena nelle mie sperienze eseguite in grande sia stata eguale o pochissimo discrepante da quella osservata dal Fisico Piemontese ne' suoi sperimenti fatti in piccolo; la qual cosa darebbe peso alla supposizione altrove da noi motivata; vale a dire che la dimostrazione della costante contrazione di vena, quando questa si faccia su due lati soli, ovvero a due sole variabili, e sia compresa fra superficie piane, non curve, vaglia ancora per la contrazione fatta su quattro lati, e però a tre variabili e con superficie curve, quali sono le contrazioni

de' mentovati sperimenti. Sembra adunque che sopra l'autorità della sperienza si possa credere costante questo coefficiente che esprime l'effetto della contrazione di vena, e si possa quindi, malgrado qualunque allargamento della catteratta da noi descritta nel capitolo IX, salva la sua altezza e salvo il battente, ottenere sempre inalterabilmente la debita misura dell'acqua in giusta proporzione della grandezza della luce, e per la medesima sezione di questa rappresentata, nel che sta la prima condizione di una pratica per dispensa d'acqua, che dire si possa convenevole.

Ma senza notare che comunemente i risultamenti delle sperienze lasciano sempre desiderare qualche cosa dal canto della certezza, della puntualità e della generalità, onde non sono mai da porsi al paragone de' risultamenti del calcolo, noi faremo particolarmente riflettere che tutti gli sperimenti, compresi ancora i miei, ne' quali sembra riscontrarsi una costante contrazione di vena, sono stati eseguiti con luci quadre o rotonde, e perciò di due dimensioni uguali; volendo dunque attenerci all'autorità della sperienza, converrebbe fare tutte le bocche di derivazione di forma quadra; ed allora non si può più conservare costante la loro altezza, e la determinazione di questa diventa in pratica un affare intricato, nè più si ha uniformità di metodo, nè si può mai sempre ottenere la

indispensabile condizione che la grandezza della luce esprima essa medesima la quantità dell'acqua che si dispensa. All'opposto poi se vorremo, come fu suggerito, conservare invariabile l'altezza, adattando la larghezza alla quantità or maggiore, or minore dell'acqua che si vende, facendo in conseguenza le bocche or più, or meno bislunghe secondo il bisogno, rinunzieremo del tutto all'appoggio della sperienza, e rimarrà per lo meno affatto incerto se nelle varie forme bislunghe delle cateratte si possa considerare invariabile la contrazione della vena, e conseguentemente sarà incerta la fedeltà della dispensa dell'acqua. Altri difetti di questa pratica abbiamo altrove rammentati, ed aggiungeremo qui per ultimo, che se gli spigoli della cateratta rivolti contro il corso dell'acqua non sono ben tagliendi, per poco che abbiano del rotondo o dello smussato, lo smusso, facendo funzione d'imbuto, può sensibilmente alterare la misura dell'acqua, il che apre la via a non indifferenti frodi. Ma troppo ancora abbiám detto per mostrare l'imperfezione di somigliante modo di dispensa d'acque anche nella supposizione che mercè dei nostri suggerimenti si cercasse di renderla assai men viziosa di quello che sia in pratica.

Delle sperienze del Regolatore a doccia non piena.

158. Avanti di por fine agli sperimenti che aveva intrapresi, io volli fare alcune prove ancora del primo mio Regolatore senza la traversa, vale a dire a doccia non piena, e colla corrente a superficie inclinata.

Quando il battente dell' acqua alla fronte del Regolatore seguava intorno a 0,080 sopra il livello delle sponde della doccia al suo principio, l' acqua che all' uscire dall' imbuto, ed al primo entrare nel canale della doccia lo empieva del tutto pareggiando l' altezza delle sponde, andava poi più e più abbassandosi sotto il livello di queste, finchè allo sbocco si trovava circa met. 0,20 sotto di esso. La superficie della corrente al principio ed al fine della doccia era visibilmente curva; ma fra questi due estremi, cioè nel mezzo la curvità sua era all' occhio insensibile, e potevasi trattare qual piano inclinato. Alla precisa metà della doccia, vale a dire a met. 0,72 dal confine dell' imbuto, la tangente dell' angolo d' inclinazione più volte misurata fu ritrovata = 0,13. Il variare di alcuni millimetri del battente non porta divario sensibile in questa misura.

Nell' adattare il Regolatore rimase al fondo della doccia una piccola inclinazione a seconda del corso dell' acqua, la cui tangente misurata si rinvenne = 0,026.

Avvegnachè questa non porti che un divario di qualche millesima parte nel calcolo, nondimeno se ne tiene conto.

159. Abbiamo pertanto nella doccia una corrente compresa nel descritto sito fra quattro superficie piane, due delle quali radono le sponde, e sono perciò verticali e parallele fra loro, e le altre due, ciò sono la suprema e l'infima, hanno un' inclinazione pel verso della corrente, la di cui tangente segneremo m per la prima, e n per la seconda. Essa perciò si trova alla condizione contemplata nell' art. 86, ed avremo in conseguenza la quantità dell' acqua che passa dalla sua sezione in ciascun minuto secondo della nuova divisione, mercè della formola

$$Q = \frac{L\chi}{n-m} \left\{ \text{Arc. tang. } n - \text{Arc. tang. } m \right\},$$

nella quale $m = 0,13$; $n = 0,026$; e la larghezza costante L di questa sezione della doccia distante met. 0,72 dal confine dell' imbuto $= 0,199$.

Nel valore della χ non entra il tempo, atteso che la corrente si trova in uno stato permanente; onde per determinare la χ , avremo l'equazione dell' art. 66

$$\chi = a(v) \sqrt{1 + m^2};$$

a denotando l'altezza verticale della corrente, e (v) la sua velocità in superficie. Potendosi da questa superficie risalire ad un punto dove l'acqua alla fronte del Regolatore è stagnante, si troverà per l' art. 69

$$(v) = \sqrt{2gb},$$

b indicando la differenza di livello fra la superficie dell'acqua stagnante avanti il Regolatore e la superficie dell'acqua corrente nella doccia all'indicato sito: dunque

$$x = a \sqrt{(2gb)} \sqrt{(1 + m^2)};$$

conseguentemente

$$Q = 0,199 \frac{a \sqrt{(2gb)} \sqrt{(1 + m^2)}}{n - m} \left\{ \text{Arc. tang. } n - \text{Arc. tang. } m \right\}.$$

160. La quantità Q moltiplicata pel numero de' minuti secondi centes. che in ciascuna esperienza misura la durata dello sgorgamento dell'acqua, esprime in metri cubi l'intera massa dell'acqua in ogni sperimento sgorgata. L'altezza a della corrente, e la differenza b di livello fra la sua superficie e quella dell'acqua stagnante variavano alquanto dall'una all'altra prova, onde a ciascheduna sono nella seguente tavola notati i corrispondenti valori. In ogni esperienza era segnato coi soliti tre spilli il battente dell'acqua osservato alla fronte del Regolatore, ed il mezzano fra i tre pochissimo fra loro discrepanti è quello che viene descritto nella tavola. Ecco pertanto l'avvenimento di questi sperimenti.

TAVOLA VI.

*Sperienze del Regolatore = a doccia non piena =
con superficie e fondo inclinati.*

Larghezza della corrente alla metà della doccia = 0,199.

Tangente m d' inclinazione della superficie = 0,13.

Tangente n d' inclinazione del fondo = 0,016.

La durata del tempo è misurata a minuti secondi centesimi.

Numero delle sperienze.	Durata del tempo	Battente del mezzano.	Altezza a della corrente.	Differenza b di livello.	Quantità dell'efflusso secondo		Errore della sperienza in ragione del tutto.
					il calcolo.	la sperien.	
1	199"	metri. 0,0786	metri. 0,2981	metri. 0,2122	met. cubi. 20,832	met. cubi. 20,265	—0,0272
2	176	0,0806	0,2990	0,2133	18,530	18,115	—0,0229
3	174	0,0744	0,2898	0,2163	17,880	17,508	—0,0208
4	174	0,0762	0,2925	0,2154	18,009	17,583	—0,0236
5	168	0,0765	0,2929	0,2153	17,408	17,563	+0,0089
6	163	0,0857	0,3057	0,2117	17,480	16,951	—0,0302
7	163	0,0870	0,3077	0,2110	17,565	17,142	—0,0240
8	164	0,0777	0,2948	0,2146	17,076	17,760	—0,0185
				Somme Differ.*	144,780 .. = 2,893	141,887	
Le quantità mezzane risultanti dalle otto sperienze sono come qui sotto, cioè:							
	Tempo	Battente.	Altezza a	Differenza b di livello.	Quantità dell'efflusso secondo		Errore mezzano della sperienza.
					il calcolo.	la sperien.	
	172",6	0,0796	0,2975	0,2137	18,097	17,736	—0,0199

161. Conviene osservare che, posta da canto la quinta sperienza, la quale, sebbene sembri la più esatta, io considero come la più errata, tutte le altre s'accordano nel dare una quantità alquanto difettiva, ed il massimo svariato che passa fra loro non eccede 0,012, come non eccede che di un solo centesimo il massimo errore di queste sperienze paragonato coll'errore mezzano, nel che debbono reputarsi più regolari questi sperimenti che quelli della seconda tavola, e di altri ancora. Ma dalla costanza del piccolo errore negativo veniamo avvertiti che intervenne qualche errore nella osservazione e nelle misure (il che tutto appartiene alla parte sperimentale), ovvero che ci fu nelle sperienze qualche cagione atta a diminuire alquanto la dispensa dell'acqua. Ora il primo dei due inconvenienti era assai facile a succedere, ed il secondo era inevitabile. Imperocchè, quanto al primo, si può credere che alla precisa metà della doccia la superficie del fluido avesse un grado di curvità sensibile alla sperienza, benchè insensibile alla vista; in fatti si potrebbe facilmente mostrare che il preciso punto, in cui la superficie dovea essere più spianata che altrove, avea a trovarsi non nel mezzo, ma alquanto più vicino al principio che al fine della doccia. Oltre di che la superficie della corrente, che nei primi sperimenti fatti colla traversa ed a piena doccia all'uscire dall'imbuto (ove prendevasi la misura della sezione) era

perfettamente piana e tranquilla, ne' presenti, tolta la traversa, ed acquistata perciò dall'acqua novella caduta entro la doccia medesima, si vedeva palpitante ed ondeggiante; era pure alquanto ineguale la sua altezza dall'una all'altra sponda; quando però al dato sito, distante 0,72 dall'imbuto, calando dal livello delle sponde un regolo largo quanto la doccia per misurare l'abbassamento della corrente sotto le sponde medesime, onde dedurne la sua altezza segnata a e la differenza b di livello a tal sito corrispondenti, io teneva l'istrumento immobile alla medesima altezza, la corrente ora vi batteva dentro in qualche parte o in tutta la sua larghezza, ed ora vi passava sotto senza punto toccarlo; tale incostanza era per così dire costantissima, e regnava rispettivamente su tutti i punti della corrente presi a traverso della doccia. Questa specie adunque di vacillamento nella superficie dell'acqua può con tutta facilità introdurre qualche piccolo errore nelle misure delle quantità a , b , come ognun vede.

Quanto poi al secondo inconveniente, è agevole il persuadersi come debba necessariamente derivare dalla medesima sorgente, vale a dire dall'ondeggiamento cui soggiace la corrente; imperocchè in ogni sorta di agitazione eccitata in una corrente, oltre che rendonsi oblique le vene capillari, si diminuisce la copia dell'acqua da ciascheduna tramandata, e si va distruggendo quella parte di movimento

ch'è in onde convertita; conciossiachè le onde fra loro contrastando e colle sponde, non si premono solamente, ma in verità si percuotono, non altrimenti che facciano i corpi solidi, come ne dà a divedere il romoreggiamento che ne viene; e colla percossa si estinguono a vicenda il movimento. Simil perdita di moto si è fino ad ora da poco attenti osservatori attribuita alla difficoltà o resistenza che prova il fluido nello strisciarsi lungo le pareti de' canali; difficoltà che punto in ciò o poco suole avere di colpa.

Le due descritte origini d'errore hanno potuto per avventura accoppiarsi per dare lo svario negativo e quasi costante del due per cento in tutte le sperienze.

162. Applicando il calcolo parabolico allo sbocco dell'imbuto, dove $\alpha = 0,41285$, $L = 0,1976$, e secondo i risultamenti mezzani della tavola $b = 0,0796$, tempo = $172",6$, la quantità dell'acqua sgorgata in ciascheduna sperienza si troverebbe di met. cub. 28,113. Considerando poi l'obliquità della superficie qual contrazione di vena che si operi su d'uno dei quattro lati (giacchè per la forma della macchina gli altri tre ne vanno esenti), e facendo alla detta somma la deduzione che corrisponda alla quarta parte dello scapito che suole dalla contrazione cagionarsi, si avrebbe tuttavia un eccessivo prodotto parabolico = met. cub. 25,396. Si troverà similmente un considerabile eccesso, applicando il calcolo parabolico colla medesima

modificazione alla sezione situata alla metà della doccia, computando sopra gli elementi dalla tavola somministrati. La ragione di queste eccedenti somme in confronto della giusta quantità = 18,097 dipende dal non essere la contemplata sezione a libera cateratta: e ciò conferma il difetto generale delle pratiche nelle quali l'acqua dai moduli non esce a libera cascata.



ANNOTAZIONI.

ANNOTAZIONE I.^a

(*Alla prefazione per gli Accademici.*)

Innanzi di essa potrete chiamare la poca discretezza di quello Straniero già da Voi in altro tema additato, ecc.

LA Società dei Quaranta propose nel 1804 un premio « a chi meglio ed interamente si farà ad investigare quanto siano solidi e giusti i principj ai quali appoggia le sue nuove teorie idrauliche l'autor recente dell'opera intitolata NOUVEAUX PRINCIPES D'HYDRAULIQUE par BERNARD, 1787, ecc. » Dall'esatto calcolo che abbiamo dato pel movimento delle acque apparisce, che questo dipende non solamente dalla forza *acceleratrice*, di cui è animata ogni fluida stilla, ma eziandio dalla forma dell'esteriore superficie, a seconda della quale è obbligata muoversi la corrente; ma l'autore di cui si parla è alienissimo dall'aver tal cosa in considerazione; ciò basta per la sua confutazione; se non che a questo difetto, che gli è comune con altri scrittori, egli aggiunge altri errori suoi particolari.

Imperocchè considerando ripieno d'acqua un vaso che abbia forma di prisma e sia pertugiato al fondo, supponghiamo in guisa che l'orifizio occupi due parti di tutta l'ampiezza, ed il sodo del fondo ne occupi tre, egli pretende che questo regga tre quinte parti del peso dell'acqua nel vaso contenuta, e non vuole che siano due le altre parti del medesimo peso, le quali rimangano operose per dar moto al fluido, ma quattro; poichè immagina che il fondo equivalga ad un piano inclinato, il quale operando la *decomposizione* d'un peso o forza = 5, e distruggendone per supposizione colla sua

resistenza una = 3, deve lasciar libera ed attiva, come ognun sa, altra forza = $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, non riflettendo che questa forza = 4 per essere secondo il supposto affatto libera d'intoppo, verrebbe tutta impiegata nel moto dell'acqua, e conseguentemente produrrebbe nel fluido una quantità di moto = $\frac{4}{5}$ di quello che sarebbe dalla gravità generato nella fluida massa, se questa cadesse liberamente nel voto, il che si oppone alla manifesta verità, trovandosi in effetto minore di $\frac{2}{5}$. Ma lasciando ancora ciò da canto, se il fondo

colla parte solida sostiene tutto il peso della fluida colonna ad essa sovrapposta, esso non fa l'ufficio di piano inclinato; e se all'opposto fa le veci di piano inclinato, più non s'intende perchè sostenga tutto il peso del corpo d'acqua che posa sopra la sua base, o un peso a questo equivalente. In effetto poi nelle parti superiori del vaso tutta l'acqua discende perpendicolarmente, e nelle parti inferiori affacciandosi all'orifizio per sortire, tutte le fluidi stille si muovono sopra infiniti piani d'inclinazione estremamente diversi, correndo orizzontalmente quelle che rasentano il fondo, e cadendo a piombo quelle che discendono per l'asse del vaso; tanto al vero eterogenea è l'idea immaginata dall'autore d'un sol piano inclinato, che operi ad un modo la decomposizione del peso di tutta la fluida massa.

L'autore applica somiglianti principj anche al movimento dell'acqua ne' canali di fondo orizzontale; e supponendo che, mentre l'acqua alla loro estremità sgorga a libera caduta, venga sempre nei canali medesimi mantenuta alla medesima altezza fino all'estremo orlo dello sbocco (condizione strana e ben difficile ad accoppiarsi coll' assunto dell'autore), ne ricava, contro l'evidenza della geometrica verità, che la velocità ragguagliata della vena sgorgante non è che la metà di quella che rendono le tavole paraboliche. Egli deduce altresì da' suoi principj che, collocando sul fondo di un canale qualche traversa, l'acqua che giace sotto il livello della sua cresta rimane stagnante, mentre l'altra che supera l'altezza dell'ostacolo seguita il suo corso, la qual cosa è totalmente opposta alle nostre dimostrazioni ed alle sperienze del nostro Regolatore = a piena doccia. ==

Non lascerò tuttavia di dire che l'autore in mezzo a questi ed altri molti suoi garbngli, che sarebbe troppo lungo il descrivere, ha talvolta riconosciuto i falli nei quali sono incorsi gli Scrittori Italiani. La nostra geometria serve a dare un retto giudizio sopra l'uno e sopra gli altri, ed a risolvere compiutamente l'analogo problema dell'Accademia.

Il nostro calcolo somministra la soluzione di altro quesito proposto nel 1781 dall'Accademia di Mantova ne' seguenti termini: « Stabilire la vera teoria delle acque uscenti da fori aperti ne' vasi, e mostrare in quali circostanze possa ella applicarsi alle acque correnti negli alvei naturali. » Il signor Coccoli di Brescia coraggiosamente cimentando le sue forze colla difficoltà del problema, s'accinse ad integrare l'equazione de' fluidi a due variabili. Ma egli diede un'espressione imperfetta dell'integrale, e conseguentemente delle due velocità p , q d'ogni fluido elemento, come si riconoscerà dal confronto dei valori ch'egli (Dissertazione ecc., facc. 22) assegna alle V , v equivalenti alle nostre p , q cogli esatti valori delle medesime quantità da noi rappresentati all'articolo 41, nel qual errore egli fu preceduto da altri, come si osserverà nelle *Lezioni di Calcolo differenziale* di Consin, facc. 311 e 312. Oltre di che non avendo il nostro autore potuto determinare le funzioni arbitrarie che entrano nell'integrale, fu costretto a confessare (facc. 25) che *tali e tante sono le difficoltà da superarsi, che fanno disperare di mai poter giungere al caso di applicare alla pratica questo rigoroso metodo*: quindi per la prima parte dell'accademico problema riguardante il movimento dell'acqua ne' vasi pertugiati fu costretto a ricorrere all'usato metodo vizioso, che a dispetto del vero suppone animate d'un medesimo movimento tutte le particelle fluide che formano uno strato orizzontale. E quanto alla seconda parte concernente il corso delle acque negli alvei naturali, ch'è la ricerca più nobile e più importante, l'autore, dopo alcuni poco accurati ed infruttuosi tentativi, finì col professare (facc. ultima) *saper egli soltanto mostrare che il problema non potrà mai essere sciolto*. Nulladimeno l'onorata e saggia Accademia di Mantova coronò col premio il suo scritto, e meritamente, poichè anche il solo sforzo dell'ingegno in tal genere di ardue ricerche è degno di ricompensa.

La dottrina del movimento delle acque sia ne' vasi, sia ne' canali è la medesima, ogni vaso essendo un canale, ed ogni canale un vaso; ed il problema dichiarato insolubile nella Memoria di Coccoli è quello che si scioglie nella mia. Onde può a ragione dirsi che questa serve a risolvere tre problemi accademici, vale a dire i due del 1804 e del 1813 proposti dalla Società di Verona, e quello del 1781 saviamente messo in campo dall'Accademia di Mantova, i quali altrimenti erano lasciati insolubili.

ANNOTAZIONE II.*

(All' art. 19, facc. 24.)

Potrebbe sembrare che in virtù dell'equazione di condizione $N=0$ il termine $- \sigma dN$ ch'entra nella prima equazione dell'art. 19 fosse $=0$, e però eguale allo zero o ad una quantità costante il suo integrale. Ma questa equazione di condizione, come qualunque altra di tal genere, si riferisce alle ordinate x, y, z di ciaschedun punto della massa, ed alle rispettive variazioni $\partial x, \partial y, \partial z$ ch'esse fanno per un movimento al medesimo punto conferito, le quali variazioni per soddisfare all'equazione di condizione debbono esser tali che rendano $\partial N=0$. Ben diversa è la cosa, se in vece delle variazioni $\partial x, \partial y, \partial z$ dovute al movimento di un punto, si considerino le differenze Dx, Dy, Dz che passano fra le ordinate x, y, z, x', y', z' di due punti diversi: queste differenze non avendo alcun legame colla condizione del moto e colla sua equazione, possono avere qualunque diverso rapporto fra loro; onde la differenziale DN che da esse risulta può ottenere qualsivoglia valore. Un esempio chiarirà la cosa.

La condizione del moto generalmente espressa per $N=0$ sia la seguente:

$$\sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}} - C = 0,$$

C denotando una costante. Questa condizione è quella di un corpo solido, un punto del quale che abbia le a, b, c per ordinate, sia fisso ed immobile. Notiamo L il primo termine di questa espressione,

che rappresenterà la distanza che giace fra un punto il quale abbia le x, y, z per ordinate, ed il centro del moto, ovvero il punto immobile che ha le ordinate a, b, c , sarà $N = L - C$. Intendasi conferito un movimento qualunque al punto cui appartengono le ordinate x, y, z ; dovendo per l'equazione di condizione rimanere invariabile nel moto la distanza L del punto mobile dal punto immobile, le variazioni $\partial x, \partial y, \partial z$ avranno ad essere tali che ne venga

$$\frac{x-a}{L} \partial x + \frac{y-b}{L} \partial y + \frac{z-c}{L} \partial z = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) \partial x + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) \partial y + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) \partial z = \partial L = 0;$$

e quindi $\partial N = \partial L = 0$.

Ma se in vece risguarderemo due diversi punti della massa, uno de' quali abbia le ordinate x', y', z' , e l'altro le x, y, z , talchè sia $x' = x + Dx, y' = y + Dy, z' = z + Dz$, le due distanze L', L di questi punti dal centro del moto non saranno eguali; onde

$$\frac{x-a}{L} Dx + \frac{y-b}{L} Dy + \frac{z-c}{L} Dz = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) Dx + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) Dy + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) Dz = L' - L = DL$$

non sarà più $= 0$; onde essendo $DN = DL$, non si avrà $DN = 0$.

Ognun vede che la ragione di questa discrepanza fra le $\partial N, DN$ sta nell'essere le $\partial x, \partial y, \partial z$ assoggettate all'equazione di condizione $N = 0$ relativa al movimento, e nell'essere le Dx, Dy, Dz dalla medesima indipendenti. Si può per altro di qua ricavare che sebbene l'uso permetta d'indicare generalmente le equazioni di condizione per $M = 0, N = 0$, ecc., esse tuttavia più convenientemente si esprimono per $\partial M = 0, \partial N = 0$, ecc.

Ritornando adunque all'equazione dell'art. 19, si conoscerà non dover essere $-oDN = 0$, e perciò l'integrale di questo termine sarà una quantità variabile, il cui valore dipenderà dal valore delle x, y, z , delle quali è funzione. L'osservazione della presente nota, qui collocata per maggior chiarezza, appartiene ancora all'art. 15 §. Allora le tre espressioni ecc.

(All' art. 23, facc. 28.)

Inoltre le sperienze che si fanno intorno all'acqua, l'uso squisito delle bilance idrostatiche, il livello costante al quale si conforma la superficie tranquilla de' grandi laghi e del mare, obbligano a dover considerare l'acqua come dotata di gelosissima e perfetta fluidità ecc.

Secondo le sperienze di Rumford, eseguite con gelosa bilancia idrostatica, un corpo che presenti al contatto dell'acqua una superficie di pollici quadri 368 (mis. ingl.), perde di peso un grano più che non è il peso di egual volume di acqua; e questo eccesso di peso perduto sarebbe effetto della coerenza o viscosità delle fluide particelle che sostengono il corpo immerso. Se questo, qualunque sia la sua natura, sperimenta, come par ragionevole il supporre, una medesima resistenza per la tenacità del fluido in cui s'immerge; un globo di acqua che ha pollici 10,8233 di diametro, e pollici quadri 368 di superficie (mis. ingl.), il quale pesa 168c60 grani (peso di Troy), perderebbe una cento sessantotto mila sessantesima parte del suo peso a cagione della tenacità delle parti acquose che lo circondano; quantità estremamente piccola, che può mostrare l'eminente grado di fluidità che ha l'acqua. Ma potendosi dubitare ancora che lo sperimentato svariato di peso venga se non in tutto, in parte almeno da qualche difetto della bilancia o della minuta sperienza, egli riesce meglio consultare su di ciò i grandi fenomeni della natura.

Io dirò a questo proposito delle osservazioni fatte nel 1810 e nel 1811 per più mesi sul livello dell'acqua, e sopra le sue variazioni alle estremità del Lario o lago di Como. Questo lago riceve l'Adda, che gli dà principio al confine della Valtellina, ove ha Cera alla destra, e Colico (Caput lacus) alla sinistra; a Bellaggio (Bivium lacus) si divide in due rami, l'uno piegando a dritta si volge a Como, donde l'acqua non ha uscita, l'altro si stende in dirittura del tronco fino a Lecco, ove di nuovo manda fuori l'Adda: noi non parleremo che del corpo diritto del lago che giace fra Colico e Lecco.

Due movimenti in esso si osservano, l'uno di semplice bilancio, quale si farebbe in due canne comunicanti di un sifone, e l'altro di corso fluviale. Col primo l'acqua tende a mantenersi bilanciata dall'una all'altra estremità del lago; coll'altro il lago a guisa di fiume seguita a muoversi, benchè lentamente, dall'un capo verso l'altro: ambedue questi movimenti debbono essere comuni a tutti i laghi ne' quali entra, e da cui sorte un fiume.

Quanto al primo movimento, le osservazioni danno a conoscere che all'alzarsi o abbassarsi del lago ad una estremità, si alza o si abbassa nel medesimo tempo anche all'altra con poco divario or di più, or di meno, dipendente dall'effetto incostante de' venti, o da qualsivoglia altra cagione particolare, ed anche da qualche errore delle osservazioni. E siccome tale corrispondenza di variazioni osservate ad una medesima ora del giorno non si deve fare per salti, ma gradatamente e con andamento continuato, talchè a mano a mano che cresce o cala l'altezza dell'acqua ad una estremità, cresca o cali parimente su tutta l'estensione del lago fino all'altra estremità, converrebbe credere che ogni nuova sottilissima falda o nastro sottilissimo di acqua che si sovrapponga alla superficie del lago là dove ha principio, basti col momento lievissimo dell'impercettibile suo peso ad agitare tutta la gran mole dell'acqua nel lago contenuta, forzandola a ristringersi nelle sue file per potersi sollevare in altezza, flottando che si pareggi col livello della sovrappioggia fluida falda; il che mostrerebbe una sensibilità o fluidità nell'acqua senza limiti. Ma poichè questa considerazione per essere appuato illimitata non può mettersi in figura di computo aritmetico, noi conteremo in vece sopra il secondo movimento, col quale il lago imita, benchè da lungi, il corso de' fiumi; ed il conto varrà presso coloro i quali avranno sufficiente pratica delle idrauliche cose per conoscere la giustezza del discorso.

La pendenza del lago, da cui sola dipende il movimento perenne delle sue acque, è sì piccola, che sebbene nelle pieve crescer debba necessariamente a più e più doppi, come vedremo, pare dalle diligenti osservazioni fatte per più mesi mentre cresceva o calava il lago agli *idrometri* collocati nelle sue estremità, non si può ricavare alcun certo indizio di qualche vantaggio di pendenza che vada il

lago acquistando al crescere delle sue acque, o perdendo al calare. Per farsi adunque qualche idea della pendenza che può avere, conviene ricorrere a qualche osservazione di altr' acqua, e quindi farne induzione al lago. A tal fine cade in acconcio quanto ha osservato M. de la Condamine intorno alla pendenza del fiume delle Anazoni. Questo gran fiume, il massimo tra i fiumi del globo, dal forte Pauxis al mare, viaggio per acqua di 600 nostre miglia geografiche, non avrebbe di pendenza, secondo le osservazioni del matematico francese, che circa dieci piedi parigini, vale a dire $0^{\text{mm}},00000392$ per ogni metro; prendiamola più che tripla, e facciamola $0^{\text{mm}},000009$ per allontanare ogni sospetto di errore che l'abbia renduta minore del vero. La larghezza del fiume è di una lega, quella del lago si può qui valutare di mezza lega: quanto alla profondità, si sa soltanto che nel fiume non si trovò fondo a 103 braccia, sono metri 167, e che nel più profondo del lago si è trovata l'altezza di 400 braccia di Mil.^o, cioè sono metri 237; ma si consideri anche la profondità ragguagliata del lago eguale soltanto alla metà di quella che abbia il fiume; le sezioni dell'uno e dell'altro in tal caso saranno simili, e quel che chiamasi dagl' Idraulici raggio medio, che qui si confonderà colla profondità, sarà pel lago = 1, e pel fiume = 2. Per tale divario, secondo la stima più sfavorevole al nostro conto, la pendenza del lago, supponendo eguali le velocità, sarebbe il doppio della pendenza del fiume; ma per largheggiare di vantaggio facciamola tripla, anzi contiamola = $0^{\text{mm}},00003$.

Il fiume corre almeno tre miglia geografiche all' ora; il lago quando è nella massima piena ed ha la massima velocità, prescindendo dall' azione dei venti, non percorre un miglio al giorno; ponghiamo dunque la sua velocità nel tempo di grande piena = $\frac{1}{72}$ della velocità fluviale. Nelle acque più scarse, facendo nn conto moderato, si trova che il lago non versa dal suo emissario che circa la ventesima parte delle acque che sgorgano nelle maggiori piene; dunque in tale stato di acque magre la velocità del lago sarà circa un ventesimo della mentovata, in conseguenza verrà ad essere = $\frac{1}{1440}$ della descritta velocità fluviale. E supponendo, in grande nostro disfavore,

che la pendenza cali soltanto nella semplice ragione della velocità, e non già nella ragione del suo quadrato, si troverà la pendenza del

$$\text{lago} = \frac{0^{\text{mm}},00003}{1440} = 0^{\text{mm}},00000021 \text{ per ogni metro.}$$

Di più il lago nel discendere, com'è solito sul finire dell' inverno, allo stato di sua massima bassezza, va facendo d' un gioroo all' altro sempre minori decrementi, finchè negli ultimi giorni l' abbassamento che succede in 24 ore è minore di un punto, vale a dire di $0^{\text{mm}},0041$. L' Adda che sorte dal lago soffre presso a poco un eguale abbassamento; e siccome quivi la sua altezza suol essere maggiore di $0^{\text{mm}},82$,

il suo sbassamento in 24 ore non sarà maggiore di $\frac{1}{200}$ della sua altezza. Ponghiamo ora che quanto cala in altezza, altrettanto cali in velocità, com'è più conforme ai fenomeni del corso fluviale, benchè qui torni a nostro scapito, ne verrà di conseguenza che la quantità dell' acqua mandata fuori per l' emissario non calerà in 24 che di un centesimo; quindi sarà di un centesimo diminuita la corrente del lago. E giacchè la sua altezza è costante, essendo per essa insensibili le piccole variazioni che succedono, dovrà parimente scemare di $\frac{1}{100}$ la sua piccola velocità; e perciò nell' intervallo di 24 ore

avrà corrispondentemente a calare la descritta pendenza. Supponghiamo ora che la pendenza non abbia già a calare, come altrove fu assunto, nella semplice ragione della velocità, ma come il quadrato di questa, giacchè qui tal ragione torna in nostro disfavore; e si conoscerà che il decremento della pendenza del lago nello spazio di 24 ore riuscirà intorno ad un cinquantesimo della totale; onde essendo questa, come abbiamo detto, $= 0^{\text{mm}},00000021$, tornerà il suo decremento $= 0^{\text{mm}},000000042$.

Ma questo calo giornaliero di pendenza, come quello dell' altezza del lago non si fa a salto dall' un gioroo all' altro, ma continuatamente e per gradi insensibili; ponghiamo solo che si faccia d' ora in ora, il decremento di pendenza in ciaschedon' ora sarà una ventiquattresima parte del giornaliero, conseguentemente riuscirà per ogni metro lineare $= 0^{\text{mm}},0000000017$, che per comodo di calcolo diremo $0^{\text{mm}},0000000020$.

E poichè il movimento del lago è sensibile, come si vede, a questa pendenza, se noi segneremo g la gravità terrestre, dovrà l'acqua del lago essere sì slegata e sciolta nelle sue parti, e si libera e lubrifica al moto, che a lei si renda sensibile una forza $= \frac{g}{5000000000}$.

Largheggiando sempre nel conto, diamo qui al lago metri 3000 di larghezza raggiagliata, e metri 150 di raggiagliata profondità; la sua sezione sarà di metri quadri 450000. Confrontiamo sì grande ampiezza di alveo con un canale ristrettissimo, il quale, salva la simiglianza della forma, non abbia di sezione che la diecimillesima parte di un metro quadrato; e ritenendo che gl'impacci sofferti dall'acqua nel suo moto crescano come il perimetro della sezione diviso per la sezione, vale a dire in ragione inversa del raggio medio, che qui potrà senza sensibile errore pigliarsi per la profondità del canale, siccome la profondità dell'angusto canaletto per la supposta somiglianza di figura sarà alla profondità del lago come la radice della piccola sezione dell'uno alla radice della grande sezione dell'altro, gl'impacci del moto nel piccolo canale in paragone di quelli che soffre l'acqua nel vasto catino del lago cresceranno nella ragione di 67082 : 1; conseguentemente anche la pendenza in quello dovrà crescere altrettanto per dare all'acqua forza bastevole a vincere tali impedimenti. Quindi si troverà che in questo canaletto, il quale per la supposta piccolezza di sua sezione e somiglianza di figura colla sezione del lago non sarà largo che metri 0,044, e non avrà che metri 0,0022 di altezza d'acqua, altezza assai minore del diametro di una goccia, l'acqua sarà sensibile ad una forza $= \frac{g}{745371}$.

Volendo pertanto supporre che tutta la resistenza, la quale si soffre dall'acqua nel suo moto, vale a dire tutta la perdita che fa delle sue forze provenga dalla tenacità o viscosità delle sue parti, la forza di questa viscosità, colla quale si supponessero legate insieme fra loro le fluide particelle ed attaccate al fondo del canaletto, non giugnerebbe ad uguagliarsi colla settecentomillesima parte della gravità; poichè se ciò fosse, l'acqua non si moverebbe. Laonde anche in una sottilissima falda di acqua che appena si striscia sul

fondo di un angusto canaletto, l'effetto della viscosità sarebbe sì piccolo, che di gran lunga eccederebbe i limiti d'ogni più minuta osservazione, e sarebbe del tutto qual uou fosse. Ma questa viscosità se esiste non può essere che la più debole fra le cagioni della resistenza che l'acqua soffre al moto, vale a dire dello scapito che fa delle sue forze; poichè questo, come altrove indicammo, necessariamente deriva dalle onde che le ineguaglianze sparse sul fondo e lungo le sponde del canale sogliono in questo eccitare, le quali col loro contrasto agli occhi visibile distruggono il moto; onde la stima della viscosità si deve di molto ancora abbassare; ma questo è poco, poichè noi nel nostro computo abbiamo a bello studio posti tutti gli elementi in nostro disfavore, e massimamente ciò che riguarda la proporzione della pendenza alla semplice velocità, non al suo quadrato: talchè si conoscerà che pigliando le cose tutte a dovere, la piccolezza della forza di tenacità render si deve cento e cento volte ancor minore, andando così al di là d'ogni confine della nostra immaginazione.

Non vale qui recare in campo l'osservazione di una gocciola di acqua che si regge sopra la sua base o pende sospesa dall'estremità di un fuscelletto, poichè l'esempio proverebbe troppo, e concluderebbe che l'acqua non ha punto di fluidità. Tal fenomeno adunque deve manifestamente attribuirsi ad altra particolare cagione che non è la viscosità; in fatti appena si presenta un listello di carta bagnata al contatto della goccia, che questa rapidamente ed in un attimo scorre per esso mostrando la perfetta sua fluidità.

Dal fin qui detto adunque si conchiude che l'acqua possiede in sommo grado la fluidità, ed è quindi estremamente sensibile e pieghevole al più debole impulso d'ogni immaginabile tenuissima forza, il che la rende sommamente fedele ed obbediente alle leggi del calcolo, che sono le leggi della forza motrice. Ho creduto appunto di dover dare idea, siccome ho fatto, della perfettissima fluidità dell'acqua, per mostrare la somma conformità che deve passare fra il prescritto matematico del calcolo e l'effetto reale della natura.

(Agli articoli 28, 29 e 30.)

Il signor Laplace reputa molto esteso il caso in cui abbiasi $pDx + qDy + rDz$ = differenziale esatto (*Mecc. Cel. tom. 1, succ. 95*). Lagrange dopo aver cercato di mostrare non grande generalità di tale combinazione, ha creduto potersi forse da taluno dubitare se si desse giammai alcun movimento ne' fluidi senza che in esso si verificasse la condizione di quell'esatto differenziale (*Mecc. Anal. tom. 2, facc. 310*); onde a torre tal dubbio ha stimato di recare l'esempio del movimento di rotazione, qual è quello del mare, il quale non ammette l'integrabilità di $pDx + qDy + rDz$. Qualche altro matematico seguendo l'autorità di questi, ha similmente opinato essere in natura molto diffusa simile combinazione. Dopo aver preso in qualche particolare esame questa proprietà, su cui è fondata l'equazione cui suole ridursi quella de' fluidi, io ho creduto soggiungere in questo luogo qualche rischiaramento di tal materia, studiandomi tuttavia di non uscire dai limiti di non semplice annotazione.

Richiamiamo un momento l'idea astratta di questa *integrabilità* alla fisica e reale sua nozione. Siano p, q, r forze *acceleratrici* che incitano al moto ciascun punto della fluida massa; pDx, qDy, rDz saranno le medesime forze appartenenti alle lunghezze Dx, Dy, Dz differenziali della massa, e $pDx + qDy + rDz$ esprimerà la somma delle forze delle quali è animata la massa nella diagonale $= \sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ in direzioni parallele ai rispettivi assi delle x, y, z , poichè a questa diagonale corrispondono le Dx, Dy, Dz . Quando il moto è impedito, le forze acceleratrici p, q, r in vece di velocitare premono, e le pDx, qDy, rDz non meno che la loro somma $pDx + qDy + rDz$ diventano elementi di pressioni. Allora quest'ultima espressione rappresenta la pressione che la diagonale $\sqrt{(Dx^2 + Dy^2 + Dz^2)}$ esercita sopra il punto che segneremo P , situato alla sua estremità opposta all'origine delle forze, la qual pressione, per le cose nella Memoria dimostrate, opererà egualmente per ogni verso: quindi la somma $\int (pDx + qDy + rDz)$ presa da un punto qualunque della massa fino al determinato punto P della medesima

esprimerà l'accumulamento delle pressioni fatto lungo la linea che risulta dalla somma $\int \sqrt{Dx^2 + Dy^2 + Dz^2}$ delle diagonali cui appartengono le Dx , Dy , Dz ; il quale accumulamento di pressioni sarà l'azione della massa sopra il punto P propagata per tal linea.

Quando $pDx + qDy + rDz$ è integrale esatto, vale a dire quando $\int (pDx + qDy + rDz)$ è *integrabile*, l'accumulamento di pressioni, ch'è l'integrale, ad un punto determinato P della massa deve rinscire il medesimo, qualunque sia la linea lungo la quale s'intenda fatto, ovvero l'azione della massa sopra il punto P deve trovarsi la medesima, qualunque sia la linea per cui si propaghi. Ciò si verifica nell'equilibrio, poichè altrimenti la pressione che prevale lo rompe inducendo movimento. Nell'equilibrio adunque la $\int (pDx + qDy + rDz)$ è integrabile. Ma ogni volta che la $pDx + qDy + rDz$ può in tutta la massa accumularsi e convertirsi totalmente in pressione, vi potrà essere equilibrio nella massa medesima, poichè le forze p , q , r saranno in tale supposto impiegate a premere soltanto, non a velocitare. L'essere dunque integrabile la $\int (pDx + qDy + rDz)$ consiste nel potersi assolutamente accumulare in tutta la massa le forze pDx , qDy , rDz convertendosi in pressioni. Allora adunque ad ogni punto determinato P della massa corrisponderà una determinata pressione che noteremo σ , la quale esprimerà l'azione di tutte le forze acceleratrici p , q , r della massa sopra il punto P , e similmente la contraria azione di tal punto sopra tutta la massa.

Se ora nelle p , q , r in vece di semplici forze acceleratrici sostituiamo delle velocità, egli è chiaro che avrà luogo il medesimo discorso; ma poichè dove la forza acceleratrice si trasforma in pressione, la velocità si cangia in percossa, in vece di essere $\int (pDx + qDy + rDz) = \sigma$, σ denotando una pressione, sarà $\int (pDx + qDy + rDz) = \phi$, ϕ significando una percossa. Parlando adunque di velocità p , q , r , il differenziale $pDx + qDy + rDz$ sarà esatto ed *integrabile*, quando le forze per esso espresse potranno accumularsi convertendosi in percosse. Allora la ϕ riferita ad un punto qualunque P della fluida massa esprimerà la percossa che tutte le parti del fluido, in virtù delle velocità delle quali sono animate, imprimono su tal punto, e parimente il ripercotimento che questo esercita contro tutta la massa in virtù della contraria sua azione. Così è ridotta all'evidenza di un

fatto palpabile una delle più astratte nozioni della matematica, qual è quella della *integrabilità* di una forma differenziale.

Passando pertanto una perfetta analogia tra la pressione ϖ e la percossa ϕ , sarà possibile la $f(pDx + qDy + rDz) = \phi$, nel che sta l'integrabilità della formola differenziale di cui parliamo, quando cangiando la velocità p, q, r in forze acceleratrici, si troverà possibile la $f(pDx + qDy + rDz) = \varpi$.

In natura considerando i corpi fluidi ed omogenei posti alla superficie della terra, sappiamo che la risultante delle forze acceleratrici p, q, r non è che la gravità, la quale si deve qui riguardare come costante di forza e di direzione; onde farsi

$$pDx + qDy + rDz = gDz = \text{differenziale esatto,}$$

g denotando la gravità ed z la linea della sua direzione; quindi in essi è sempre possibile l'equilibrio, altro non richiedendosi per ottenerlo in effetto, se non che la superficie libera del fluido restasi orizzontale, affinché riuscendo ad essa perpendicolare la direzione della forza, si abbia su tutta la sua estensione $f(pDx + qDy + rDz) = c$, essendo ivi per necessità $\varpi = c$. Ma ne' fluidi in movimento la risultante delle velocità p, q, r può variare all'infinito, e parlando a rigore, essa in natura si ravvisa sempre varia nelle diverse parti del fluido che si muove. Da ciò si può ben comprendere che l'equilibrio delle velocità rappresentato dalla ϕ dev'essere in natura un accidente ben raro in paragone dell'equilibrio delle forze acceleratrici espresso per la ϖ , cioè a dire che il caso di $pDx + qDy + rDz$ differenziale esatto sarà in natura assai raro per le velocità, comunque frequente per le forze acceleratrici.

Oltre di che parlando di queste ultime forze, il loro rapporto e la direzione della loro risultante sono indipendenti dalla forma del vaso, vale a dire dalla posizione e curvità delle superficie che lo contengono; all'opposto il rapporto scambievolmente delle velocità p, q, r e la direzione della loro risultante dipendono dalla forma delle superficie che sono secondate dal movimento del fluido. Ciò rende sì raro il caso del differenziale esatto, che supponendo la corrente compresa fra quattro superficie piane ed inclinate soltanto a seconda o a ritroso della corrente, che sono le più favorevoli a tal accidente, sarà

malagevolissimo l'ottennero, eccetto che nella supposizione che sia

$$\frac{n-m}{\lambda} = \frac{v-u}{\pi},$$

n, m indicando le tangenti degli angoli che le due sponde fanno col piano delle x, y , e λ la larghezza del fiume; v, u denotando parimente le tangenti degli angoli che le due superficie infima e suprema fanno col piano delle x, z , e π la profondità della corrente, la qual combinazione è tanto singolare che può dirsi strana, e quindi difficilissima ad ottenersi in effetto. Tutto ciò cospira colla grandissima difficoltà di trovare giammai avverato il caso in cui si veggano concorrere insieme le tre particolari condizioni espresse per le equazioni

$$\left(\frac{Dp}{Dy}\right) = \left(\frac{Dq}{Dx}\right), \left(\frac{Dp}{Dz}\right) = \left(\frac{Dr}{Dx}\right), \left(\frac{Dq}{Dz}\right) = \left(\frac{Dr}{Dy}\right),$$

le quali non hanno fra loro alcun legame, e sono tuttavia necessarie, come si sa, tutte e tre per rendere esatto il differenziale di cui si ragiona.

Dopo queste premesse che mostrano quanto esser debba raro l'accidente di tal differenziale, vediamo quali e quanti siano i casi nei quali secondo i matematici ottenersi debba il suo riscontro. Il sommo geometra Lagrange è quegli che ne ha parlato più a lungo (*Mecc. Anal. tom. 2, facc. 307 e seg.*), onde basta che a lui ci attenghiamo. Egli dimostra che il differenziale $pDx + qDy + rDz$ sarà sempre esatto, quando sia tale per qualche istante di tempo; ciò è vero, ma la difficoltà sta appunto nel poter esser esatto per qualche valore del tempo t ; il valore grande o piccolo di questa quantità e di qualunque altra (giacchè corre per tutte una medesima ragione) è affatto indifferente alla forma di una funzione, e da questa sola dipende l'essere o non essere un differenziale esatto. Si passa quindi nel citato luogo a far osservare che il differenziale sarà sempre esatto, quando il movimento partirà dallo stato di quiete; poichè allora in sul cominciare del moto, vale a dire mentre $t = 0$, si ha $p = 0, q = 0, r = 0$, donde s'inferisce che per questo primo istante di tempo la $pDx + qDy + rDz$ è un differenziale esatto, e che però secondo il premesso principio sarà tale anche in processo. Ciò non potrebbe

dirsi in generale, essendo possibile che parta dalla quiete anche un movimento di rotazione, nel quale total differenziale non è esatto: e in vero un fluido contenuto, per esempio, in un cilindro può essere messo in giro per mezzo di un diaframma volatile attorno al suo asse per l'azione di un contrappeso che pende da una carrucola posta all'estremità dell'asse medesimo, qual diremo essere quello delle z , e che comincia il suo movimento dallo zero. Nel qual caso si avrà $p = \theta y$, $q = -\theta x$, $r = 0$, θ significando la velocità angolare, che sarà funzione del tempo che impiega il contrappeso nel cadere; quindi $pDx + qDy + rDz = \theta (yDx - xDy)$ che non è integrabile. Parlando a rigore, quando $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, la differenziale diviene $= 0$, e quello zero si confondono indifferentemente i differenziali tanto esatti che non esatti; così al vertice, per esempio, di una curva ove sia $x = 0$, $y = 0$, si trova eguale allo zero tanto il differenziale $xdy + ydx$, quanto il differenziale $xdy - ydx$, benchè il primo sia *integrabile*, non il secondo.

Per poter offrire l'*integrabilità* del differenziale dal cominciare che fa il moto dalla quiete, convenien supporre che le forze *acceleratrici*, dalle quali è sospinto al moto ogni fluida particella, derivino, come la gravità, da attrazioni proporzionali a funzioni delle distanze de' centri, dalla quale supposizione è dedotta la dimostrazione di Lagrange. In fatti allora, come noi abbiamo a suo luogo mostrato, si ha $dpDx + dqDy + drDz$ differenziale esatto; onde essendo al principio del moto $p = dp$, $q = dq$, $r = dr$, in questo primo istante di tempo $pDx + qDy + rDz$ è differenziale esatto, e perciò tale si mantiene in progresso.

Ma questo caso, in cui il movimento di una fluida massa parta dallo stato di riposo, io credo sia ben raro assai. Parliamo di un fluido che venga animato dalla gravità, affinchè un corpo, per esempio, di acqua, una stroschia, una corrente alle prime sue mosse partir possa dallo stato di quiete, cominciando cioè nel primo istante dallo zero la sua velocità, e nell'istanti successivi gradatamente aumentandola, convenien supporla costituita pensile in aria o nel voto, ed abbandonata a sé stessa ed al suo peso; il qual caso, oltre l'essere puramente ideale, non suffraga punto la presente ricerca del movimento de' fluidi, giacchè allora la fluida massa si muove a guisa

di corpo solido. Dico che convien supporre tal corrente pensile in aria, perchè se altrimenti la fluida massa in qualche maniera è sostenuta, onde le parti superiori aggravandosi sopra le inferiori producano in queste una pressione ϖ , ed al medesimo livello vi abbia un'apertura, dove la superficie del fluido sia libera, e dove perciò divenga $\varpi = 0$, quivi il fluido dovrà essere animato da una velocità v

corrispondente a tale pressione, onde reodasi $\frac{1}{2}v^2 = \varpi$, come altrove abbiamo mostrato.

Io so bene essersi introdotta fra i matematici l'opinione che la pressione non possa produrre una velocità finita se non per gradi, e cominciando dalla velocità $= 0$, del qual espresso sentimento egli è pure il medesimo Lagrange, sommo geometra e sommo maestro delle meccaniche scienze (*Mecc. Anal. tom. 2, facc. 280*): nulladimeno io confesso che dopo molta riflessione io non so persuadermene; poichè considerando che non stantuffo, il quale con una forza costante calchi la superficie della colonna d'acqua contenuta in una tromba o in uno schizzatoio, non caccia fuori l'acqua che per mezzo della sola pressione, e riflettendo che supposta sempre eguale l'azione dello stantuffo, lo schizzo dell'acqua sortir deve invariabilmente col medesimo impeto dal primo istante fino all'ultimo, io mi convinco che la pressione anche nel primo primo momento di sua operazione è valevole a generare una velocità finita, e che perciò eziandio nel nostro caso si avrà, come fedelmente il calcolo ci addita, $\frac{1}{2}v^2 = \varpi$.

Laonde in una massa d'acqua che sia in qualche modo e su qualche lato sostenuta da fondo, da sponde e simili, esercitandosi sempre qualche pressione, non si comincerà giammai il movimento dalla quiete: tali pertanto essendo universalmente in natura ed in ogni genere di artificiale sperienza le masse di acque correnti, ad esse per tal titolo non apparterrà la proprietà del differenziale essito competente al movimento che principia colla velocità $= 0$, o come suol dirsi infinitamente piccola. E qui è da avvertire che si parla del movimento che in un dato qualunque punto dello spazio, cui corrispondono le ordinate determinate $x = a$, $y = b$, $z = c$, cominci nel primo istante dallo zero, e vada poi crescendo al medesimo sito

negli stanti successivi, non già di una velocità che sia $= 0$ in un luogo, e divenga quantità finita in un altro, come succede alle acque che sortono dai laghi, le quali nel grande catino sono stagnanti e prive di sensibile moto; ed all'emissario non meno che nel susseguente alveo del fiume hanno vivace corso; al qual caso non è punto adattabile il presente canone del differenziale esatto.

Il signor Lagrange passa a dire di un'altra condizione valevole a rendere la $pDx + qDy + rDz$ differenziale esatta, la quale consiste nell'essere la velocità iniziale del fluido prodotta da un'impulsione qualunque datagli alla superficie, come, per esempio, si farebbe coll'azione di uno stantuffo. Ed arreca di ciò la ragione, perchè le velocità p, q, r impresses al fluido in ogni suo punto in virtù dell'impulso conferito alla superficie debbono esser tali, che se venissero distrutte coll'imprimere ad ogni punto del liquore contrarie ed eguali velocità, tutta la massa del fluido resterebbe in equilibrio; onde sarebbe equilibrio in virtù dell'impulso dato alla superficie, e delle velocità $-p, -q, -r$ applicate a ciascun punto nell'interno della massa: ora l'equilibrio richiede che le forze siano tali da rendere esatta il differenziale $pDx + qDy + rDz$; dunque la condizione dell'impulso comunicato alla superficie del fluido importa mai sempre tale proprietà di differenziale esatto.

Da quanto abbiamo detto nel principio di questa annotazione si riconosce la ragione per cui convenga all'equilibrio tale proprietà, perchè là dove il movimento è impedito, come succede nell'equilibrio, se le parti del fluido sono tutte animate da forze acceleratrici, conviene che si puntellino le une contra le altre, il che fa che le forze si convertano in pressioni, e che le $pDx + qDy + rDz$ vadano accumulandosi le une alle altre, il quale accumulamento è in termini matematici la loro *integrazione*, donde nasce la pressione ϕ , ch'è però integrale esatto. Nell'equilibrio pertanto le diverse parti del corpo, ovvero le loro forze sono in un continuo contrasto fra loro, e questa continua ed egual lotta delle forze di una parte contra le forze dell'altra è quella appunto che tiene in bilancia tutte le diverse parti del corpo. Ma ben diversa è la cosa nel proposito nostro, poichè le velocità $-p, -q, -r$ impresses a ciascun punto della massa non mettono in contrasto fra loro le diverse parti del fluido, né le

forze p, q, r , delle quali si soppongono animate, ma altro non fanno che annientare ciascheduna di queste al suo posto, sicchè il corpo rimanga senza alcuna forza che al moto lo solleciti, e senza alcuno scambievolmente contrasto fra le varie parti che lo compongono.

Ora questo stato non è che una privazione di forze sollecitanti al moto, la quale non altrimenti che per un equivoco può confondersi coll'equilibrio, il quale suppone un costante combattimento tra forze e forze, e si di tutte contro ciascuna, come di ciascuna contro tutte: nè quindi si può inferire che ci abbia o aver ci possa accumulamento delle medesime forze, nel che consiste l'*integrabilità* o condizione dell'integrale esatto di cui si tratta. E in vero coll'imprimere queste contrarie velocità $-p, -q, -r$ alle acque stesse del mare si farebbe cessare il giornaliero suo movimento di rotazione; nulladimeno questo è incompatibile colla proprietà del differenziale esatto, come si può ricavare dalla espressione testè addotta pel movimento di rotazione, facendo in essa costante la velocità angolare per θ espressa.

Ma immaginiamo per maggior chiarezza un vaso in forma di cono, il quale sia volubile attorno all'asse che passa per l'acuta sua estremità, e sia ripieno d'un fluido che ci figuremo privo d'ogni forza *acceleratrice*: il fondo del vaso sospinto da qualche forza al moto comunicherà un'impulsione alla superficie del fluido colla quale è in contatto, ed obbligherà la liquida massa a muoversi in giro attorno all'asse di rotazione; prescindiamo da quella piccola forza che concepirà per iscappare dal centro del moto, o fingiamola distrutta con una contraria forza, onde il fluido rimanga ognora entro il vaso. Le parti del liquido più lontane dal centro del moto concepiranno maggiore velocità, minore le più vicine, ed al centro sarà la velocità $= 0$. Supponghiamo ora conferite in un istante a ciascun punto del fluido le contrarie velocità $-p, -q, -r$, rimarrà in quell'istante il fluido senza alcuna forza; e nell'istante successivo saranno di nuovo colla impulsione data alla superficie posteriore impresse ad ogni elemento del fluido le velocità p, q, r , e di nuovo siano queste estinte colle contrarie velocità $-p, -q, -r$ ad ogni punto comunicate, verrà di nuovo restituito quello stato d'inerzia o di nessuna azione che era tolto mercè delle conferite forze p, q, r :

e tante volte si rinnoverà questo stato di semplice mancanza d'azione, quante fiate intenderemo essere prima comunicate le velocità p , q , r , poi distrutte colle contrarie forze $-p$, $-q$, $-r$ ad ogni punto applicate. Ed ognuno può conoscere che in tale giuoco non si farà giammai alcun aggravamento di parti sopra parti del fluido, veran accumulamento di forze, niuna pressione, niuna percossa, in una parola niun equilibrio, quando equivocare non si voglia, chiamando equilibrio lo stato di nessuna forza, e la sola e semplice privazione d'ogni azione e d'ogni conato.

All'opposto, se estinte che sianu le velocità p , q , r colla impressione delle contrarie $-p$, $-q$, $-r$, avrà l'azione di queste a seguitare, supponendo che il fondo del vaso resti saldo al suo posto per fare ad esse contrasto colla sua resistenza, e per obbligare in tal modo, s'è possibile, le parti fluide a caricarsi le une sopra le altre, e tutte sopra sè, e conseguentemente per costringere le forze ad ammontarsi, allora il fluido anziché rimanere in equilibrio, scagliandosi impetuosamente verso l'asse del moto, si lancerà tutto fuori del vaso; poichè le velocità non potranno accumularsi e convertirsi in una percossa φ contro il fondo, come non potrebbero formare equilibrio, e trasformarsi in una pressione ϖ le $-p$, $-q$, $-r$ se fossero forze *acceleratrici*, poichè crescendo la forza da esse risultante in proporzione della distanza dal centro del moto, il fluido più distante da questo sarebbe più pesante che il più vicino, il che rompe l'equilibrio, e fa sì che venga a generarsi moto in cambio di pressione.

L'essere adunque il movimento di un fluido prodotto per via di impulsione data alla sua superficie non rende *integrabile* la $pDx + qDy + rDz$. Qualunque sia l'origine del moto, l'*integrabilità* di questo *differenziale* deriva dalla qualità delle funzioni che esprimono le p , q , r ; e questa dipende dalla natura di quella curva che, secondo l'equazione di condizione, il liquido è costretto a dover nel suo moto secondare, la qual curva può in mille modi variare, ancorchè si supponesse generato il moto mediante un impulso comunicato alla superficie del fluido.

Prendendo pertanto in considerazione tutte le premesse dichiarazioni, ci persuaderemo che radiissime volte accader possa di trovarsi

nel movimento de' fluidi verificata a rigore la condizione del differenziale esatto di cui si tratta. Nulladimeno noi passeremo a mostrare, come parlando delle acque correnti e de' fiumi sia generalmente adattabile al loro movimento il calcolo su tal base fondato, e come con questo si possano senza alcun sensibile errore determinare i principali fenomeni del loro corso.

Consideriamo una corrente o un fiume, nel movimento del quale siano variabili tutte e tre le ordinate x, y, z . L'asse delle x sia orizzontale e diretto secondo il corso dell'acqua, l'asse delle z sia parimente orizzontale, ma a traverso della corrente, mentre l'asse delle y sia verticale. Ciascheduna sponda del fiume abbia per sua proiezione sul piano orizzontale delle x, z una curva qualunque, e similmente il fondo e la superficie suprema abbiano ciascheduno qualsivoglia curva per sua proiezione sul piano verticale delle x, y . Per ciascheduna di queste quattro curve, fra le quali si muove la corrente, abbiasi la rispettiva equazione $Dy = mDx$, $Dy = nDx$, $Dz = uDx$, $Dz = vDx$, m, n, u, v essendo quantità variabili e funzioni della sola x . Supponghiamo, com'è permesso, che i tre assi abbiano una comune origine, onde sia $y = 0, z = 0$, dove $x = 0$; si noti a l'altezza del fiume all'origine degli assi, e b la sua larghezza; sia poi λ l'altezza variabile, e ϖ la larghezza parimente variabile del medesimo corrispondente a qualsivoglia ordinata x . Ben si scorge che in tal modo si suppone muoversi il fiume fra quattro comunque fra loro diverse superficie curve, la cui curvatura non sia fatta che pel verso della corrente.

Cercando in tale assunto la ϕ a tre variabili coll'integrare l'equazione (g) dell'articolo 26 (fac. 35), la quale suppone la condizione della $pDx + qDy + rDz = \text{differenziale esatto}$, e quindi cavando il valore di ciascheduna velocità p, q, r senza oltrepassare il loro primo termine, si trova essere

$$\begin{aligned} p &= \frac{\lambda}{\lambda\varpi}, \\ q &= \frac{\lambda}{\lambda\varpi} \left(m \frac{a}{\lambda} + \frac{n-m}{\lambda} y \right), \\ r &= \frac{\lambda}{\lambda\varpi} \left(u \frac{b}{\varpi} + \frac{v-u}{\varpi} z \right). \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} p &= \frac{\lambda}{\lambda\varpi}, \\ q &= \frac{\lambda}{\lambda\varpi} \left(m \frac{a}{\lambda} + \frac{n-m}{\lambda} y \right), \\ r &= \frac{\lambda}{\lambda\varpi} \left(u \frac{b}{\varpi} + \frac{v-u}{\varpi} z \right). \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots (A).$$

Ma questi tre primi valori delle p , q , r si ottengono medesimamente e senza alcuna disparità, eccetto quella d' un calcolo più prolioso, anche per mezzo della equazione (c) dell' articolo 24 (facc. 3o), la quale non è limitata dalla condizione del *differenziale* esatto, e s' integra sviluppandola in serie coi noti metodi.

Passando inoltre a cercare il secondo termine della p col supporre, a fine di rendere più semplice il calcolo, la curvità delle quattro superficie sì poca che queste possano considerarsi come piane e come costanti le m , n , u , v , si ritrova nel primo assunto del *differenziale* esatto

$$p = \frac{\chi}{\lambda w} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\chi}{\lambda w} \left\{ m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} m^2 \frac{v-u}{n-m} \cdot \frac{a^2}{\lambda w} - \frac{1}{6} (n^2 + nm + m^2) \frac{v-u}{n-m} \cdot \frac{\lambda}{w} \right. \\ & + u^2 \frac{b^2}{w^2} + \frac{1}{2} u^2 \frac{n-m}{v-u} \cdot \frac{b^2}{\lambda w} - \frac{1}{6} (v^2 + vu + u^2) \frac{n-m}{v-u} \cdot \frac{w}{\lambda} \\ & + \left(2m \frac{n-m}{\lambda} + m \frac{v-u}{w} \right) \frac{a}{\lambda} y + \left(\frac{(n-m)^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{n-m}{\lambda} \cdot \frac{v-u}{w} \right) y^2 \\ & + \left(2u \frac{v-u}{w} + u \frac{n-m}{\lambda} \right) \frac{b}{w} z + \left(\frac{(v-u)^2}{w^2} + \frac{1}{2} \frac{v-u}{w} \cdot \frac{n-m}{\lambda} \right) z^2 \left. \right\} \quad (B). \end{aligned} \right.$$

E questo medesimo valore della p inoltrato al suo secondo termine si ottiene indipendentemente dalla mentovata condizione del *differenziale* esatto, integrando cioè la citata equazione generale (c) sgonnera d'ogni supposizione.

Ora abbiamo già osservato che nel corso de' fiumi si possono generalmente riguardare come piane le quattro superficie, fra le quali si muovono le loro acque o il maggior loro corpo che più importa di considerare; onde ad essi generalmente è adattabile il premesso calcolo. Di più abbiamo mostrato come nelle acque correnti e nei fiumi le m , n , v , u sogliono essere sempre quantità numeriche assai piccole in paragone dell'unità, di modo che le m^2 , n^2 , u^2 , m^4 , ecc. riescano affatto non apprezzabili; e siccome i secondi termini delle q , r sono dell'ordine di m^2 , n^2 , u^2 , ecc., ed il terzo termine della p dell'ordine di m^4 , n^4 , u^4 , ecc., ne segue che nel calcolo del movimento delle acque correnti e de' fiumi non sono da valutarsi che i termini

compresi nelle espressioni (A) e (B), e questi essendo sempre esatti ancorchè dedotti dalla supposizione dell' *integrabilità* di $pDx + qDy + rDz$, si potrà, a fine di rendere più trattabile e più spedito il calcolo, generalmente considerare nello correnti e ne' fiumi come *integrabile* questo differenziale, il che pienamente conferma quanto fu detto in fine dell' articolo 30 (facc. 40).

Le formole (A) e (B) abbracciano tutta la teorica dell' azione che l' obblighità delle sponde e la pendenza del fondo e della superficie de' fiumi esercitano sul corso de' medesimi a qualunque distanza dalle ripe ed a qualunque profondità, considerando tanto l' obblighità di quelle, quanto la pendenza di questi diretta a seconda o a ritroso della corrente.

Giacchè abbiamo dato questo saggio d' *integrazione* per l' equazione de' finidi a tre variabili, di cui parlammo alla facc. 44, ci sia qui permesso di toccare due cose, cioè:

1.^o Che istituendo coi dichiarati valori delle p, q, r a tre variabili le ricerche analoghe a quelle che nell' articolo primo della seconda parte della Memoria furono intraprese coi valori delle medesime quantità a due variabili, non sarà difficile il riconoscere che si ottengono i medesimi risultamenti; onde quanto ivi concludenmo considerando separatamente o la sola obblighità delle sponde d' un fiume, o la sola inclinazione del fondo e della superficie, vale egualmente nel caso concreto di un fiume che abbia insieme in qualunque modo obblighi le sponde ed inclinato le superficie suprema ed infima.

2.^o Che considerando il movimento dell' acqua soltanto in una sezione, e facendo però nelle espressioni (B) ed (A) $\lambda = a$, $\varpi = b$, talchè quelle si cangino nelle seguenti

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\chi}{ab} \\
 - \frac{\chi}{ab} \left\{ m^2 - \frac{1}{6} (n+2m) (v-u) \cdot \frac{a}{b} \right. \\
 &\quad \left. + u^2 - \frac{1}{6} (v+2u) (n-m) \cdot \frac{b}{a} \right. \\
 &\quad \left. + \left(2m \frac{n-m}{a} + m \frac{v-u}{b} \right) y + \left(\frac{(n-m)^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{n-m}{a} \cdot \frac{v-u}{b} \right) y^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(2u \frac{v-u}{b} + u \frac{n-m}{a} \right) z + \left(\frac{(v-u)^2}{b^2} + \frac{1}{2} \frac{v-u}{b} \cdot \frac{n-m}{a} \right) z^2 \right\},
 \end{aligned}$$

$$q = \frac{x}{ab} \left(m + (n-m) \frac{y}{a} \right),$$

$$r = \frac{x}{ab} \left(u + (v-u) \frac{z}{b} \right),$$

non potremo dall' espressione $\frac{p}{v}$, cioè dalla $\frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}$, fare sparire le quantità a , b . Essendo pertanto la contrazione della vena una funzione della $\frac{p}{v}$, nella sua espressione rimarranno necessariamente comprese le grandezze dei due lati della sezione per cui l'acqua passa, finchè le a , b saranno quantità disuguali; e non potranno sortire se non nel caso che sia $a = b$, divenendo allora $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, ed essendo altronde dopo l'integrazione $y = a$, $z = b$. Quindi si raccoglie che la contrazione della vena se potrà essere la medesima in tutte le bocche quadre, nelle quali si ha $b = a$, dovrà essere diversa in tutte le bocche di figura bislunga, nelle quali si ha $b > a$, ovvero $a > b$. Questo conferma quanto della contrazione della vena abbiamo detto nel nostro *Ragguaglio matematico*, facc. 42.

ANNOTAZIONE V.*

(All' art. 50, facc. 65.)

Supporremo che le due sponde o superficie che sono lambite dal fluido, e si rappresentano dalle equazioni $Dy_1 = mDx$, $Dy_2 = nDx$, siano piane.

Diamo un saggio anche per le superficie curve, nelle quali le m , n sono quantità variabili e funzioni della x . Si ritenga che qui non meno che nel citato luogo viene considerato $\left(\frac{Dy}{Dx} \right) = 0$, supponendosi il movimento indipendente dalla ordinata z . La curvità delle superficie nessun cambiamento introduce nelle indagate prime approssimazioni dei valori tanto della funzione F , quanto delle velocità p , q ; cerchiamo adunque la differenza che essa induce nel

secondo termine della F , e quindi le variazioni che apporta nel secondo termine della p , il quale nella scienza de' fiumi, come abbiamo più volte insinuato, è l'unico dopo gli anzidetti primi valori che meriti considerazione.

A cagione della curvità delle superficie divenendo variabili le m , n , sarà in primo luogo da unire al secondo termine della F la quantità $-\frac{\chi}{\lambda}V$, V indicando il coefficiente $\frac{1}{3}(n^2 + nm + m^2)$, la quale quantità non potrà più considerarsi compresa nel primo valore della $F = \frac{\chi}{\lambda}$ (Vedi art. 52, facc. 66).

Faccendo poi $\frac{Dm}{Dx} = m'$, $\frac{Dn}{Dx} = n'$, m' e n' denotando due funzioni della x , e segnando $\Delta F''$, $\Delta f''$ le differenze ch'esse introducono nei valori delle F'' , f'' , si troverà facilmente

$$\Delta F'' = -\left(n' - m'\right) \frac{\chi}{\lambda^2}, \quad \Delta f'' = m' \frac{\alpha \chi}{\lambda^2};$$

quindi al secondo termine della F si dovrà aggiungere eziandio la quantità (articolo citato)

$$-\left(n' - m'\right) \frac{y_2^3 - y_1^3}{2 \cdot 3\lambda} \cdot \frac{\chi}{\lambda^2} - m' \frac{y_2^3 - y_1^3}{2\lambda} \cdot \frac{\alpha \chi}{\lambda^2}.$$

Le due precedenti quantità, che sono da aggiungersi al secondo termine della F per renderlo compiuto, dovranno parimente far parte del secondo termine della p , essendo il primo valore di questa costituito dalla F , cioè dalla F'' , come apparisce dalla serie espressa all' art. 44, facc. 59. Dalla medesima serie agevolmente si conoscerà che a compiere il secondo termine della p converrà aggiungergli la quantità

$$y \Delta f'' - \frac{1}{2} y^3 \Delta F'' = \frac{\chi}{\lambda} \left\{ m' \frac{\alpha}{\lambda} y + \frac{n' - m'}{\lambda} y^3 \right\}.$$

Rimane in tal modo pienamente determinato il secondo termine tanto della funzione F' , quanto della velocità p nel caso che le due superficie, fra le quali il fluido si muove, siano in qualsivoglia modo curve. Ma limitiamoci per maggiore semplicità all' assunto in cui le curve delle due superficie siano del medesimo genere, talchè per

una si abbia $y = e\phi x$, e per l'altra $y = E\phi x$, ϕx indicando una qualunque funzione della x , ed e, E due quantità costanti. Si otterranno in tal caso per le y , le espressioni medesime dell' art. 51, facc. 65; e sarà inoltre

$$m' : n' :: m : n;$$

quindi si troveranno i valori della F' e della p col compimento dei secondi loro termini nel seguente modo espressi:

$$F' = \frac{\lambda}{\lambda} \\ - \frac{\lambda}{\lambda} \left\{ m^2 \frac{a^2}{\lambda^2} + V - \frac{1}{2} \frac{m'm}{n-m} \cdot \frac{a^2}{\lambda} - \frac{1}{6} \frac{m'm^2 - n'n^2}{(n-m)^2} \lambda \right\};$$

$$p = \frac{\lambda}{\lambda} \\ - \frac{\lambda}{\lambda} \left\{ D + 2 \frac{m(n-m)}{\lambda^2} ay + \frac{(n-m)^2}{\lambda^2} y^2 - \frac{m'}{\lambda} ay - \frac{(n'-m')}{\lambda} y^2 \right\};$$

dove colla D viene contrassegnata la quantità chiusa fra parentesi nel secondo termine della F' .

Paragonando questi valori con quelli che non oltrepassando i secondi termini si ottengono a superficie piane (art. 52 e 60), si riconoscerà la variazione che in questi introduce la curvità delle superficie medesime.

ANNOTAZIONE VI.*

(All' art. 81, facc. 100.)

Nell' espressione

$$q = \frac{\lambda}{a} \left(m + (n-m) \frac{y}{a} \right)$$

facendo $y = 0$, si ha $q = m \frac{\lambda}{a}$, e facendo in vece $y = a$, si ottiene

$q = n \frac{\lambda}{a}$; il che indica che l'acqua alle sponde perfettamente seconda col suo movimento la loro direzione, ch'è la verità di fatto, ed in natura universale, la quale serve di fondamento ad ogni calcolo di movimento d'acqua. I fiumi adunque non altro fanno che

lambire, lavare ed astergere le ripe e gli argini, non gli urtano, non isfogan contro essi l'impeto loro, e non vi ha quivi nè angoli d'incidenze, nè angoli di riflessioni, nè percosse, nè botte che ora ascendano, ora discendano, nè simili altre dicerie, ch'è il favorito linguaggio rimasto ai ciarlatani incapaci di conoscere il vero modo col quale si operi ogni frana o sdrucio delle sponde e degli argini dei fiumi.

ANNOTAZIONE VII.*

(All' art. 84, facc. 102.)

Talmente che il metodo del quale si tratta sia adatto non solo a definire, qualora piacesse, la quantità di fluido che porta una corrente, ma a dividerla in quali e quante assolute porzioni siano a beneplacito richieste.

Si usa non di rado ancora il dividere l'acqua in porzioni non assolute, ma relative per mezzo di fabbriche chiamate Partitori, i quali servono a dividere tutta l'acqua di un canale in parti eguali ovvero anche in una data ragione disuguali, come succederebbe se, per esempio, una corrente si dovesse scompartire fra tre proprietari, in guisa che delle nove parti che formano il tutto, all'uno ne toccassero due, tre all'altro, ed al terzo quattro. Dopo che si è parlato del Regolatore che serve a dispensare l'acqua a misura assoluta, non sia discaro l'udirsi dire in breve del modo esatto di distribuirla anche a misura relativa, insegnando la maniera di costruire i Partitori per eseguire colla giustezza che si possa maggiore qualsivoglia divisione d'un corpo di acqua corrente, affinché nulla manchi alla generale dottrina della distribuzione delle acque.

Lo spediente facile e sicuro per operare il giusto scompartimento d'un'acqua corrente in quali e quante porzioni si voglia consiste principalmente nell'obbligare l'acqua a formare cascata, il che sempre si può ottenere o coll'alzare alquanto la platea della fabbrica sopra il letto della corrente, o coll'abbassare sotto il livello di questo il fondo dei rigagni che ricevono l'acqua divisa. Si scelga pertanto un tronco di canale, che almeno a grossolana stima si giudichi

diritto, o tale coll' arte si riduca per una lunghezza eguale a otto o dieci larghezze dell' alveo al più; ed all' estremità inferiore di esso si fabbrichi il partitore, che dovrà comprendere due parti, l' una alta che versa l' acqua, e che diremo il versatore, l' altra bassa, che chiameremo propriamente il partitore, formata dalle teste de' rigagni, fra le quali l' acqua rimane nell' assegnata proporzione scompartita.

Al versatore si può dare quella larghezza che più sia per tornar comoda, non però mai maggiore di quella del canale; l' asse dell' uno corrisponderà all' asse dell' altro. Nella lunghezza della sua fabbrica presa a seconda del corso d' acqua si potrebbe abbondare a beneplacito, ma basta che ne' piccoli canali si faccia di tre metri al più, e che si produca fino ai dieci ne' grandi, quali sarebbero per esempio i fiumicelli Agogna, Lambro, Chiese, e simili. La platea del versatore vuol essere orizzontale, e lastricata di pietre o almeno di mattoni. Le sponde si faranno di muro, verticali e parallele; esse vengono superiormente prolungate in due archi di dolce curvatura, finchè si uniscano alle ripe naturali del canale.

Sotto il versatore si colloca il partitore propriamente detto, vale a dire si dispongono le teste dei rigagni ne' quali si versa e si scomparte l' acqua. Le loro sponde sotto la gronda del versatore debbono formarsi di pietra o di marmo, e terminarsi superiormente in uno spigolo acuto e tagliente, perchè debbono fendere la grondaja dell' acqua che loro piomba sopra. La sommità d' ogni spigolo sarà a livello della soglia o platea del versatore; la sua lunghezza non dovrà essere minore della corda tesa sotto l' arco descritto dall' acqua grondante: al di là di questi spigoli taglienti le ripe dei rigagni si fanno di muro o di terra, come più si stima convenire. E per concedere loro spazio ad essere ingrossate, appena oltrepassate le teste si fa torcere il cammino ai rigagni, agli uni sulla destra e sulla sinistra agli altri, acciocchè si discostino fra loro quanto basta per dar luogo allo stabilito ingrossamento delle sponde; gioverà ancora a tal effetto che le sponde esterne delle due teste dei rigagni posti alle due estremità del partitore in vece di essere tirate a corda colle sponde del versatore, siano ritirate dietro la linea di queste, il che sarà indifferente alla copia dell' acqua che ne' rispettivi rigagni si versa.

La condizione essenziale per la giusta distribuzione dell'acqua coll'uso di questa fabbrica sta nel doversi trovare mai sempre nelle teste de' rigagoli il pelo dell'acqua inferiore al livello della platea del versatore, ed alla sommità degli spigoli del partitore; toccando così a ciascun proprietario la cura d'impedire ogni ringorgamento del suo rigagno, se non vuole scapitare nella quantità della sua acqua, la quale avvertenza è indispensabile in qualunque sorta di derivazioni d'acque. L'essere poi il livello dell'acqua in un rigagno più basso che nell'altro non altera punto la giusta distribuzione, il che forma una proprietà singolare di questo partitore.

Ecco adunque come si manda ad effetto questo partimento d'acqua. Abbiasi per esempio a dividere un canale di acqua o un fiumicello fra tre possessori, come supponemmo, in guisa che di nove parti due ne vadano al primo, tre al secondo, ed al terzo quattro; immaginiamo che queste divisioni debbano succedersi per ordine passando da sinistra a destra del partitore. Si misura la larghezza del versatore da sponda a sponda, e passando da sinistra a destra si pigliano $\frac{2}{9}$ di questa, e si segna un tal punto, poi procedendo in-

nanzi per altre $\frac{3}{9}$ parti si fa un secondo segno. A questi due segnali dovranno corrispondere sotto il versatore gli spigoli delle tre teste de' rigagni che formano il vero partitore; quanto alle sponde esteriori de' due rigagni che riescono laterali, esse, come avvertimmo, si potranno estrarre in quella distanza che più piace dalla linea delle sponde del versatore. Il resto si eseguisce come sopra fu descritto. Ciò basta per dar ad intendere come si abbia a fare qualunque altro scompartimento di acqua.

Avvertiremo ch'esser deve cura comune de' proprietari il mantenere, ove occorra, uniformemente spurgato quel tronco diritto di canale che precede, come esponemmo, il versatore; a tal fine si potranno collocare per segnali alcune travi orizzontali sul suo fondo; ed allora se tornasse opportuno, si potrebbe lasciar la cura a ciascuna proprietaria di mantenere sgombrato quel tratto d'alveo che corrisponde al suo rigagno.

La perfezione di questo partitore è manifesta; in tutta la larghezza del versatore l'acqua cade dalla medesima altezza, acquista

la medesima velocità, e quindi la sua quantità è in proporzione della larghezza di quella grondaja che si versa in ciascheduna testa di rigagno. Le avvertenze insinuate pel tronco di canale che sta innanzi al partitore servono a correggere qualche piccolo divario di velocità iniziale che aver potrebbe l'acqua recandosi al sopraccegglio del versatore; e la platea di questo tende vie più ad emendarlo. A che giovi la curvità data superiormente alle sponde del versatore, s'intenderà dalle cose altrove avvertite, senza che qui si ripetano.

I partitori sono particolarmente in uso fra i Bresciani. È celebre la divisione del Chiese in due parti eguali, che si fa a Gavardo. Lunghe e calde controversie per essa si agitarono, che poi vennero composte nel 1763 dal matematico Lecchi, il quale scandagliando con osservazioni la quantità dell'acqua che correva per l'una e per l'altra diramazione, conchiuse doversi ritenere per giusta la divisione eseguita già due secoli addietro dall'architetto Alberti, al qual parere si sottoscrissero le parti con una transazione che fu pubblicata colle stampe (Lecchi, Idrostatica, ecc., part. 3, art. 3). Ma questo Idrraulico fondò le sue osservazioni delle velocità dell'acqua ne' due canali sopra le sperienze che fece colla palla a pendolo, le quali di loro natura non solo possono essere talvolta fallaci, ma inducono sempre in errore; onde se nel suo giudizio ha per avventura colpito nel vero, si dovrà ciò attribuire al caso, non all'esame da esso lui istituito.

ANNOTAZIONE VIII.*

(All' art. 106, facc. 135.)

In grazia di quelli che amano di capacitarsi delle cose per via di materiali osservazioni, convien rompere il proposito di non voler più oltre dire della imperfezione della pratica milanese in dispense d'acqua corrente, a fine di mostrare a questi col fatto sino a qual segno un tale uso ne alteri le misure.

Il fondamento della pratica milanese per la giusta dispensa delle acque è il requisito che queste all'uscire della bocca di qualsivoglia modulo aver debbano tutte una medesima velocità dovuta ad

un battente di due once, ritenuta la condizione di quattr' once d'altezza nella luce del modulo medesimo. Tutto adunque il presente negozio sta nel vedere se il battente, cui è dovuta la velocità dell'acqua sboccante dall'edifizio milanese, sia di due once, supponendo nel resto che il Sopracciò abbia tutte le cose secondo la pratica accomodate. Io pensai alla facile maniera di rendere visibile all'occhio e netto e schietto il battente dell'acqua a segno di poterlo a sua posta e con tutta precisione misurare. A tal fine non ebbi che a porre in pratica la nota canna ricorva, della quale ho parlato alla facc. 177, e che io feci fare adatta al presente uso nel modo che qui descrivo.

La canna è di due pezzi, l'uno di cristallo lungo circa mezzo metro, di metallo l'altro lungo soltanto $0^{\text{mm}},66$; ambedue di pari diametro $= 0^{\text{mm}},015$. La canna di cristallo ad una estremità è cerchiata d'ottone, scolpitovi il verme della vite; il cannone breve ha una bocca arrovesciata all'insù con madre vite per unirsi alla canna. Sul fondo della madre vite è collocata una lastretta di metallo che chiude tutta la luce del cannone, se non che in mezzo di essa è aperto un rotondo forellino di diametro $= 0^{\text{mm}},001$ circa. Uniti a chiocciola e ad angolo retto i due pezzi, si applica lo strumento all'acqua sgorgante dal modulo, volgendo contro di essa il cannone perchè ci dia dentro, e tenendo la canna di cristallo dritta rasente il muro esteriore del modulo; un filo a questa avvolto segna il punto cui corrisponde lo spigolo superiore del modulo medesimo, e divide in tal modo la parte della canna che insieme col cannone si tuffa nella sua bocca da quella che si alza sopra il suo labbro.

La vena sgorgante, che direttamente imbocca nel cannone, fa sollevare l'acqua nella canna verticale di cristallo fino all'altezza dovuta alla sua velocità, ed a questo livello, eccetto piccole ed interrotte vibrazioni, mantiene ferma ed immobile a cagione della piccolezza del foro scolpito nella descritta lastretta, per cui l'acqua passando tutta e calma l'ondeggiamento. Vedesi in tal maniera elevato sopra la bocca del modulo il gennino battente, al quale è dovuta la velocità dell'acqua; nulla di più evidente e di più preciso si poteva desiderare. Si segna col dito o in qualunque altro modo il livello costante cui si è sollevata l'acqua nella canna, e

ritirandola si misura col braccio quanto quello riesca alto sopra il segnale che corrispondeva allo spigolo superiore del modulo per ottenere espressa in once la misura dell' effettivo battente.

Il primo saggio di sì piccolo strumento fu da me fatto nel passato genajo (1816) a due bocche situate io isponda al Canal Grande navigabile di Milano, l'una sopra Boffalora, e sopra Uggiono l'altra, e continuoai le osservazioni nel tronco superiore del canale della Martesana, cominciando al Porto di Cassano e terminando alle Fornaci. Altre sperienze furono poi eseguite ai 30 di aprile nel tronco inferiore del medesimo canale, cominciando sotto le mura di Milano e risalendo fino ad un miglio circa sotto Cernusco. Tanto nelle prime che nelle seconde osservazioni il pelo dell' acqua nel canale maestro era a un di presso al medesimo livello, che io reputai circa due once (met. 0,10) più basso del pelo estivo, ch'è il giusto livello al quale sogliono salire queste acque nella state per lo stroggimento delle nevi alpine; benchè l'Acquajolo, custode delle bocche di Cassano, asseveratamente mi dicesse che il livello dell'acqua corrente pareggiava il pelo estivo.

L' avvenimento delle osservazioni è registrato nella seguente tavola, la quale è divisa in due parti, l'una per lo tronco superiore del canale, e per l' inferiore l'altra. La prima comincia colle mentovate due sperienze eseguite nel tronco superiore del Canal Grande, le quali perciò appartengono a questa classe, poi prosegue con quelle istituite lungo il Canale della Martesana, principando dalla bocca Caldara posta rimpetto al Porto di Cassano, che in questa serie della tavola è la terza, e terminando alla bocca che dà l'acqua al molino delle Fornaci. La seconda ha principio dalla bocca situata dicontra alla Cascioa de' Pomi, discosta due miglia da Milano (omesse le altre inferiori, perchè diconsi d' incerta estrazione), e continua con quelle che per ordine asseguono venendo all' isola fino all' antepenultima sotto Cernusco. A tutte queste bocche nella tavola comprese furono da non molto tempo con pubblica formalità aggiustate e saldate a posto o come diconsi *intellate* secondo le regole magistrali le imposte (V. il mio *Ragguaglio matematico*, facc. 43 e 44), affinchè tutte avessero il prescritto battente di due once.

La tavola che qui soggiungiamo è per sè stessa chiara senza che sia mestiere di altra spiegazione.

TAVOLA DE' BATTENTI

Osservati a diverse bocche, magistrali del canal navigabile della Martesana, ai quali è dovuta l'effettiva velocità dell'acqua dai rispettivi moduli sgorgante.

Le misure sono espresse in once o parti dodicesime del braccio di Milano, il quale è = 0^m,59494.

TRONCO SUPERIORE.		TRONCO INFERIORE.	
Numero delle bocche.	Battenti osservati.	Numero delle bocche.	Battenti osservati.
1	once 7 $\frac{1}{4}$	** 1	once 4 $\frac{3}{4}$
2	4 $\frac{1}{2}$	2	4 $\frac{3}{4}$
3	10 $\frac{1}{2}$	3	5 $\frac{1}{2}$
4	4	4	4 $\frac{3}{4}$
* 5	2 $\frac{1}{2}$	5	4 $\frac{3}{4}$
6	9 $\frac{1}{2}$	6	2 $\frac{1}{4}$
7	8	7	1 $\frac{3}{4}$
8	9	8	2
9	5 $\frac{1}{2}$	9	2 $\frac{1}{2}$
10	6 $\frac{1}{2}$	10	2 $\frac{1}{2}$
11	5	11	3 $\frac{1}{2}$
12	7 $\frac{1}{2}$	12	3 $\frac{1}{2}$

* A questa bocca era stata dall'acquajuolo custode non poco abbassata l'impasta, perchè nella stagione jemale non le competevasi alcun diritto d'acqua; nondimeno conservava ancora un battente maggiore del prescritto.

** Alle prime cinque bocche di questo tronco inferiore il pelo dell'acqua nel canal maestro era alquanto superiore al livello ordinario, entrando in esso qualche poco di Lambro, il che obbligava a tenere aperto uno dei enoi diciannove sfogatoi, senza la quale circostanza i battenti sarebbero riusciti alquanto minori delle descritte misure.

Deve certamente recare meraviglia l'aspetto di questa tavola, risultando pateamente agli occhi la somma imperfezione degli edifizj milanesi, per la quale dove tutti aver dovrebbero un medesimo battente, prescritto di due once, alenno hallo in vece di un'oncia sola e un quartu, mentre altri lo danno a conoscere di sette, otto, nove e pur ancu di dieci once e più; per la quale esorbitante disuguaglianza riesce del tutto infedele e bugiarda la misura dell'acqua fatta coll'usu di queste macchine, giugnendu finu a parità di boeche a rendere l'una il doppio di acqua in confronto dell'altra.

È inutile il cercare onde nasca tanta fallacia, poichè sebbene l'invenzione di simil edifiziu fosse a' suoi tempi ingegnosa nella mira di dare sempre all'acqua un medesimo gradu di velocità, al che furse il primo autore aspirava con più ragionevole semplicità di costruttura, nulladimeno al lme dell'odierna meccanica considerando la macchina secondo la presente sua costruzione, convien dirla insensata e sciocca in tutte le sue parti. Per altru dalla tavola manifestamente si conosce la grande disuguaglià de' battenti fra il troucu superiore e l'inferiure; il che dipende dalla maggiore rapidità ed altezza d'acqua che ha la corrente in quello a paragone di questo; donde viene che l'acqua imboccando la cateratta maestra con velocità maggiore e maggiore differenza di livello fra il pelo esterno del fiume e l'interno del bottino (il che aumenta vie più il suo moto), giugue al vicino modulo con celerità assai più viva ed a più forte battente dovuta. Di qua dunque muove uno de' principali virj di cotal pratica di dispensa d'acque, il quale viene poi in varie guise rinforzato o modificato dagli altri multi, dei quali abbiamo altrove favellato, e che qui è vano rammentare. Si può in vece in questo lungu osservare che l'altezza di quattordici once assegnata all'acqua interna del bottino, la quale corrisponde a due once di elevazione sopra il labbro superiore del modulo, può stare e sta con un effettivo battente assai maggiore di due once; il che deve persuaderci che l'acqua chiusa fra l'imposta e la pietra che sostiene il volto del bottino (dov'è pigliata la misura delle quattordici once) non appartiene al sistema della corrente che sgurga dalla cateratta, poichè non converte la sua velocità o forza viva in altrettanta ascesa; ma a guisa di quell'acqua che annida in un seno o sdrucio fatto nella ripa di una corrente, si compone ad un livello

atto ad equilibrarla solo colla pressione della corrente medesima, non colla sua velocità, giacchè la corrente col suo moto non viene a cozzare contro di essa, nè contro le sue sponde, ma soltanto lambendola trapassa senza discapito di velocità.

Corre il terzo secolo da che i periti si aggirano intorno a queste macchine, le trattano per così dire tutto di, le maneggiano; ma lungi dall'aver giammai conosciuto il grande loro difetto, o d'averne almeno avuto qualche sentore o sospetto, non han fatto che tessere elogi della loro eccellenza; ed avrebbero verisimilmente seguitato per altri tre secoli ad encomiare l'edifizio magistrale, se altri non rendeva palese agli occhi di tutti l'assurdo suo uso, lo per altro nè mi maraviglio di sì inopportuni elogi, nè per essi fo il menomo aggravio ai periti, poichè ove si tratta di movimento dell'acqua corrente, la cognizione è superiore alla loro professione, nè la pratica si fa coi piedi.

Io mi sono accertato che pel Canal Grande fra la Castellana e la Casa della Camera, vale a dire ad un quarto circa di miglio sotto la sua derivazione dal Ticino, mentre il pelo dell'acqua era due once circa più basso dell'estivo, ch'è l'ordinario nel tempo degli adacquamenti, discorrono più di mille cinquecento once d'acqua magistrali, considerate queste a giusto battente ed a libera cateratta. Ora, secondo la ricognizione fatta nel 1791, le bocche di estrazione, compreso anche il cauale navigabile di Bereguardo, non sono investate che per once $930 \frac{7}{100}$; pongasi per largheggiare assai di 270 once la quantità d'acqua che sotto le mura di Milano si dirama al canal navigabile di Pavia ed al fosso detto del Residuo *, e diamone altre cent'once all'assorbimento delle ghiaie, fra le quali il Canal Grande nella massima sua parte è scavato, faranno in tutto mille trecento once d'acqua, onde le bocche di estrazione ingojeranno più di dugent'once di acqua, oltre la competente quantità ad esse assegnata. Ma questo calcolo è ristretto, e la copia d'acqua nel canale in tempo estivo, ch'è la stagione del suo grande uso negli adacquamenti, è assai maggiore, crescendo più di altre dugent'once, le quali sono

* Al canale di Pavia si assegnano once 150, ed in esse ha parte anche il canale della Martesana; pel Residuo poi non si lascia correre che il superfluo.

nella massima parte inghiottite dalle medesime bocche, oltre la prescritta loro assegnazione.

Avendo dato a conoscere l'abbondanza dell'acqua che discorre pel Canal Grande, credo di fare cosa grata agli stranieri, ai quali spero che giugnerà questo scritto, terminandolo colla notizia della maravigliosa copia d'acqua a principale beneficio dell'agricoltura estratta dai fiumi Ticino ed Adda nel solo territorio di Milano. Nella competente ordinaria pienezza de' canali, che succede nella state appunto quando l'acqua è impiegata al generale innacquamento de' campi, il Canal Grande estratto dal Ticino porta intorno a mille ottocento once di acqua, computata l'oncia in ragione di metri cubi 2,1168 di acqua ogni sessantesimo minuto primo (Vedi il *Ragguaglio matematico*, face. 36), per lo esale della Martesana dedotto dall'Adda non se ne tramanda meno di novecento once; e la Muzza derivata dal medesimo fiume diffonde sopra le campagne circa due mila seicento once di acqua: talchè questi tre maestosi alvei artificiali della Martesana, del Canal Grande e della Muzza avendo le rispettive portate di acqua prossimamente nella ragione dei numeri 1, 2 e 3, danno unitamente la somma in circa di cinquemila quattrocento once, equivalenti a 11430 metri cubi di acqua in ciascun minuto di tempo somministrata. Non si danno già come esatte queste quantità, ma come vicine al vero. Egli è però questo non dei non piccoli vanti dell'insubre industria; e ben dal fin qui detto si comprende che furono assai più saggi e più grandiosi i Milanesi nell'intraprendimento di vaste derivazioni di acque, che dotti ed esperti i loro architetti nell'arte di distribuirle.

FINE

DELLA MEMORIA E DELLE ANNOTAZIONI.

667941



INDICE.

PARTE PRIMA

MATEMATICA.

- CAP. I. *Nozione generale delle equazioni di condizione, alle quali deve soddisfare il movimento di qualsivoglia corpo* facc. 7
- » II. *Nozione particolare dell' equazione di condizione relativa alla inalterabilità della massa, e sua analitica espressione »* 11
- » III. *Si esamina la natura della forza di resistenza dipendente dalla inalterabilità della massa »* 16
- » IV. *Equazione generale del moto di qualsivoglia corpo. Distintivo matematico ch' essa offre de' corpi fluidi, semifluidi e solidi . . . »* 23
- » V. *L' equazione generale del movimento de' corpi si contrae al particolare del movimento dell' acqua, e si maneggia. »* 28
- » VI. *Della integrazione dell' equazione de' fluidi. »* 41
- » VII. *Digressione sopra una proprietà delle funzioni immaginarie, e conclusione della forma alla quale si riduce in termini finiti l' integrale della funzione Φ a due variabili . »* 47
- » VIII. *S' intraprende la determinazione delle funzioni arbitrarie contenute nella Φ »* 56

<u>CAP. IX. Continuazione del medesimo argomento nell' assunto che siano piane le due su- perficie lambite dal fluido</u>	<u>facc. 65</u>
» <u>X. Si ripiglia l' equazione della forza sollec- tatrice, e nel presente assunto si dicifera »</u>	<u>77</u>

PARTE SECONDA

FISICO-MATEMATICA E SPERIMENTALE.

<u>CAP. I. Idea generale del movimento delle acque correnti</u>	<u>87</u>
» <u>II. Nozione generale della misura delle acque correnti</u>	<u>102</u>
» <u>III. Continuazione del medesimo argomento .</u>	<u>112</u>
» <u>IV. Diverse pratiche usate in Italia per la mi- sura e dispensa delle acque correnti . .</u>	<u>120</u>
» <u>V. De' principali difetti delle descritte pratiche, e nominatamente della milanese</u>	<u>127</u>
» <u>VI. Della misura e dispensa d' acqua col Re- golatore a piena doccia</u>	<u>136</u>
» <u>VII. Del battente che convien dare al Regolatore per la dispensa dell' acqua a piena doccia »</u>	<u>152</u>
» <u>VIII. Si rende ragione della costruzione del Re- golatore a piena doccia, e si dà a co- noscere la sua perfezione, additandosi ancora i varj usi di simil macchina . .</u>	<u>162</u>
» <u>IX. Del Regolatore a libera cateratta</u>	<u>179</u>

<u>CAP. X. Sperienze fatte in piccolo col Regolatore</u>	
<u>a piena doccia</u>	<u>facc. 185</u>
» <u>XI. Sperienze del Regolatore a piena doccia</u>	
<u>eseguite più in grande</u>	<u>191</u>
» <u>XII. Sperienze del Regolatore a piena doccia,</u>	
<u>ma colla dispensa ridotta a mezza misura »</u>	<u>205</u>
» <u>XIII. Delle sperienze del Regolatore a libera</u>	
<u>cateratta</u>	<u>» 211</u>
» <u>XIV. Delle sperienze del Regolatore a doccia</u>	
<u>non piena</u>	<u>» 218</u>

ANNOTAZIONI

<u>ANNOT. I. Di tre accademici problemi, alla cui so-</u>	
<u>luzione serve la presente Memoria . . . »</u>	<u>227</u>
» <u>II. Dilucidazione di qualche elemento di cal-</u>	
<u>colo</u>	<u>» 230</u>
» <u>III. Della perfetta fluidità dell' acqua . . . »</u>	<u>232</u>
» <u>IV. Della $pDx + qDy + rDz =$ differenziale</u>	
<u>esatto</u>	<u>» 238</u>
» <u>V. Del movimento dell' acqua fra due sponde</u>	
<u>o superficie curve</u>	<u>» 250</u>
» <u>VI. Come i fiumi secondano col loro movimento</u>	
<u>le sponde, e non le percuotono . . . »</u>	<u>252</u>
» <u>VII. Della maniera di costruire i Partitori di</u>	
<u>acque</u>	<u>» 253</u>
» <u>VIII. Della sorprendente fallacia della pratica</u>	
<u>milanese per dispensa d' acque, dimo-</u>	
<u>strata con numerose osservazioni di fatto »</u>	<u>256</u>

			ERRORI.	CORREZIONI.
Facc.	13	lin. 3	$z + Dz =$	$z + Dz) =$
»	25	» 10	$F - K$	$K - F$
»	34	» 12	dy^3	dy
»	35	» 17	fluido	fluido di uniforme densità
»	84	» ult.	$(= \zeta$	$(= \gamma$
»	85	» 3	$g\zeta$	$g\gamma$
»	ivi	» 10	ζ	γ

AVVERTENZA.

Alla facc. 19, in fine dell' art. 14 soggiungasi per nota il seguente schiarimento: basta che due de' nominati angoli possano avere i coseni di qualunque valore da $V=1$ fino a $V=-1$, perchè anche il terzo debba necessariamente in ciò convenire; onde essendo tre le funzioni arbitrarie $f, \mathcal{F}, \mathcal{F}\mathcal{F}$, soddisfanno a queste due condizioni degli angoli ed insieme alla condizione dell' equazione fondamentale $\partial DM = 0$.

REALE OFFICIO TOPOGRAFICO

III Armadio .



Scienza Lib. A

N.º 15

